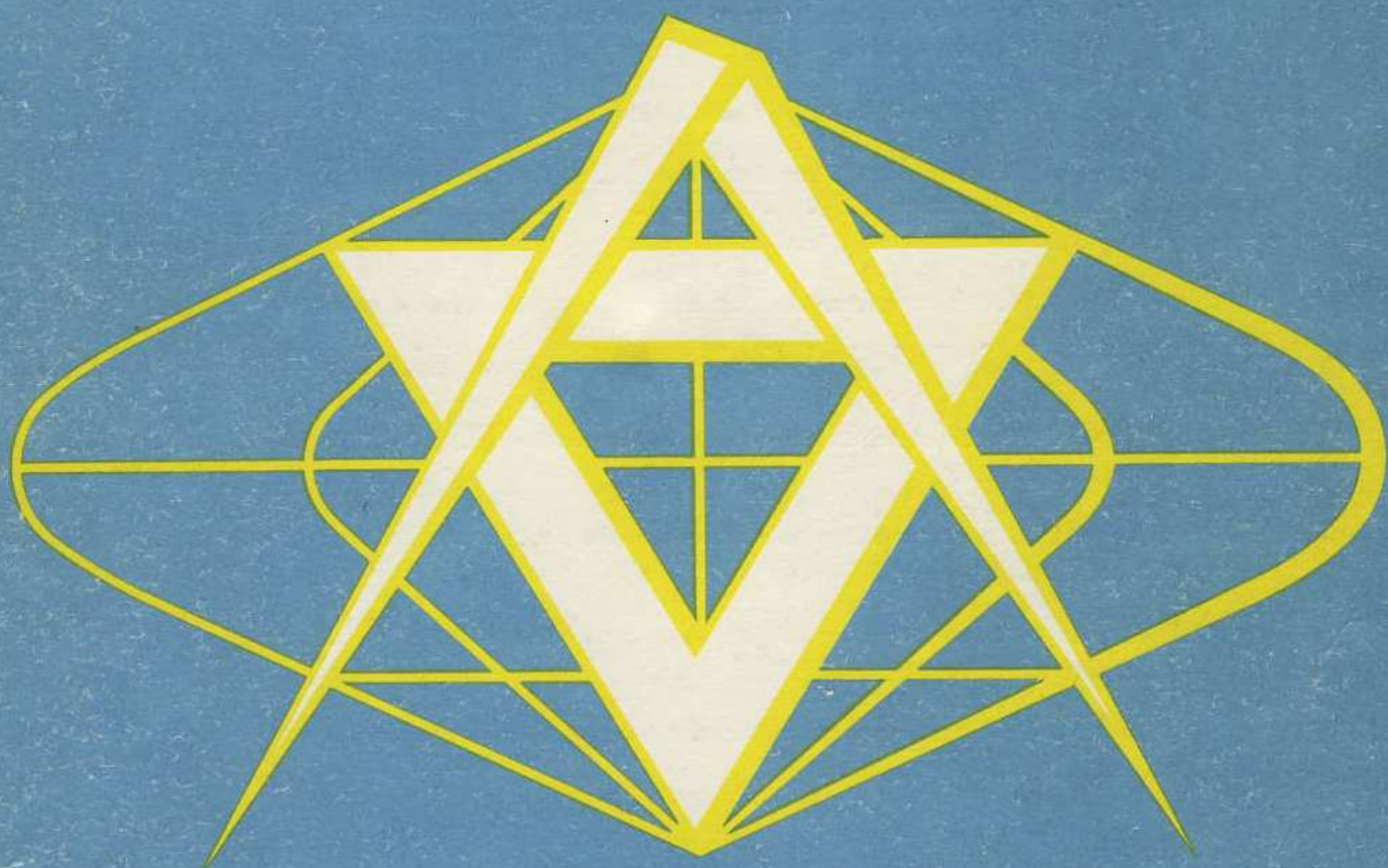


**SBORNÍK
TOPOGRAFICKÉ
SLUŽBY
MNO**



**VOJENSKÝ
TOPOGRAFICKÝ OBZOR**

1/74

OBSAH

	Strana
Plk. ing. Vladimír Vahala, CSc.: Transformace světových referenčních geodetických systémů (dokončení) <i>Recenzent: ing. Milan Burša, CSc.</i>	1
Pplk. ing. VĚNEK PAVLICA, CSc.: Přibližné vyrovnání délkových sítí podle podmínek <i>Recenzent: pplk. ing. Jan Kotva</i>	14
Prof. ing. Dr. Josef Vykutíl: K řešení hlavní geodetické úlohy na střední vzdálenosti užitím Gaussova konformního zobrazení elipsoidu na kouli	27
Pplk. ing. Jaroslav Prachař: Zjednodušený výpočet azimutu Polárky v polních podmínkách <i>Recenzent: pplk. ing. Václav Horník</i>	33
Mjr. ing. Libor Filipský: Obecné řešení transformace souřadnic mezi pásy Gaussova zobrazení <i>Recenzent: pplk. ing. Věnek Pavlica, CSc.</i>	38
Pplk. ing. Jan Kotva: Určení souřadnic bodu protínáním při měřené délce a směrníku	51
Pplk. ing. Otakar Krásný: Řešení obecné úlohy determinace liniové informace v digitálním tvaru s možností její současné rektifikace <i>Recenzent: pplk. ing. František Miklošik, CSc.</i>	63
Mjr. ing. Drahomír Dušátko: Určení některých charakteristik vnějšího tíhového pole Země pro malé výšky nad Zemí <i>Recenzent: ing. Ján Fixel</i>	75
Pplk. ing. Jiří Kánský: Ke koncepci leteckého měřického snímkování <i>Recenzent: pplk. ing. Ivan Stožický</i>	84
Mjr. ing. Josef Benedikt: Některé problémy se zhotovováním a použitelností fotomap <i>Recenzent: pplk. ing. Dimitrij Pago</i>	91
Pplk. ing. Josef Franěk: Současné problémy fotogrammetrického zhušťování <i>Recenzent: pplk. ing. Bohuslav Hanák</i>	99
Pplk. ing. Jaroslav Prachař: Řešení soustav lineárních rovnic metodou ortogonalizace <i>Recenzent: pplk. RnDr. Jaromír Bystrý, CSc.</i>	110

SBORNÍK TOPOGRAFICKÉ SLUŽBY MNO

VOJENSKÝ TOPOGRAFICKÝ OBZOR

Č I S L O
1 9 7 4 1

Plk. ing. Vladimír V a h a l á, CSc.

Transformace světových referenčních geodetických systémů

(dokončení)

Úvod

Ve Vojenském topografickém obzoru č. 1/1971 jsme se zabývali velmi aktuální úlohou soudobé geodézie / a to i z hlediska vojenských geodetických aplikací / - vzájemnou transformací světových referenčních geodetických systémů, které jsou vztaženy k různým referenčním elipsoidům, jež mají odlišné rozměry a tvar, jejichž středy neleží v těžišti Země a mezi nimiž neexistuje jakékoli spojení.

Tento problém byl zkoumán se zaměřením na transformaci severoamerického referenčního geodetického systému /NAD/ do evropského referenčního geodetického systému /EUR/ a naopak. Studium bylo umožněno publikováním některých konkrétních výsledků získaných z pozorování UDZ.

Ze zveřejnění máme však k dispozici i grafické přehledy o průběhu geoidu - nad referenčním elipsoidem EVEREST / $a = 6\,377\,276$ m, $\alpha = 1:300,80$ / jihoasijského /indického/ geodetického souřadnicového systému /IND/ se základním bodem KALIANPUR / $B = 24^{\circ}07'11''$, $L = 77^{\circ}39'18''$ /, - nad AUSTRALSKÝM NÁRODNÍM REFERENČNÍM ELIPSOIDEM / $a = 6\,378\,160$ m, $\alpha = 1:298,25$ / australského geodetického souřadnicového systému /AND/ se základním bodem JOHNSTON / $B = -25^{\circ}56'55''$, $L = 133^{\circ}12'30''$ /.

Je proto účelné rozšířit uvedené úvahy a výpočty o výsledky řešení téhož problému a týmiž metodami na dalších světových referenčních geodetických systémech, ověřit si dříve vyvozené závěry a použít výsledky pro řešení dalších úloh podobného charakteru. V této práci se zabýváme transformací geodetických referenčních systémů IND a AND do systému EUR a řešením úloh, které vyplývají ze zhodnocení výsledků této transformace, tj. především otázkou parametrů geocentrického referenčního elipsoidu.

TRANSFORMACE GEODETICKÝCH REFERENČNÍCH SYSTÉMŮ IND A AND DO SYSTÉMU EUR

1. Postup získání údajů potřebných pro výpočet

- V transformačních oblastech systémů IND a AND byla na grafických přehledech znázorňujících průběh geoidu vhodně zvolena bodová pole pro výpočet informací a zkoumání vzájemných vztahů - příloha 1 a 2.
- Výšky geoidu / ζ_{ir} / nad referenčními elipsoidy byly na uvedených přehledech odečteny s přesností $\pm 0,5$ m a byly přímým podkladem pro řešení metodou potenciálu.
- Další údaje potřebné pro metodu přímou tvořily výšky geoidu / ζ_{io} /, určené z pozorování UZ nad geocentrickými elipsoidy o parametrech totožných s parametry příslušného referenčního elipsoidu. Řešení je provedeno tímž způsobem jako při předchozím řešení systému NAD a EUR, a to s přesností odečtu hodnot $\zeta_{io} \pm 0,5$ m - přílohy 3 a 4.

2. Výpočty pro vlastní transformaci

a/ Výpočty

- souřadnic středů /posunů $\Delta X_0, \Delta Y_0, \Delta Z_0$ / obou referenčních elipsoidů vzhledem ke geocentrickému světovému souřadnicovému systému včetně
 - oprav / v / z vyrovnání,
 - jednotkové střední chyby / m_0 /,
 - středních chyb / $m_{\Delta X_0}, m_{\Delta Y_0}, m_{\Delta Z_0}$ /
- byly provedeny pro kontrolu oběma metodami - metodou přímou i metodou potenciálu.

Výsledky z celkových transformačních oblastí obou systémů nám poskytuje tento přehled:

Geodetický systém IND:

	Metoda přímá	Metoda potenciálu	Výsledné hodnoty
ΔX_0 $m_{\Delta X_0}$	+114,1 m ± 8,9 m	+ 115,5 m ± 9,2 m	+ 114,8 m ± 9,0 m
ΔY_0 $m_{\Delta Y_0}$	+ 820,7 m ± 4,5 m	+ 817,5 m ± 4,6 m	+ 819,1 m ± 4,6 m
ΔZ_0 $m_{\Delta Z_0}$	+ 98,4 m ± 12,1 m	+ 101,6 m ± 12,5 m	+ 100,0 m ± 12,3 m
m_0	± 16,4 m	-	± 16,4 m
n	139	139	139

Geodetický systém AND:

	Metoda přímá	Metoda potenciálu	Výsledné hodnoty
ΔX_0 $m_{\Delta X_0}$	- 108,9 m ± 1,7 m	- 108,7 m ± 1,9 m	- 108,8 m ± 1,8 m
ΔY_0 $m_{\Delta Y_0}$	- 56,7 m ± 1,9 m	- 56,1 m ± 2,0 m	- 56,4 m ± 2,0 m
ΔZ_0 $m_{\Delta Z_0}$	+ 93,3 m ± 2,4 m	+ 93,1 m ± 2,6 m	+ 93,2 m ± 2,5 m
m_0	± 4,3 m		± 4,3 m
n	132	132	132

/ n = počet použitých bodových informací/

Z porovnání výsledků získaných oběma metodami znovu vidíme, že

- obě metody jsou rovnocenné /podobně tomu bylo u geodetických systémů NAD a EUR/, což je dostatečně průkazné pro potvrzení správnosti řešení,
- střední chyby hodnot posunů ΔX_0 , ΔY_0 , ΔZ_0 i jednotková střední chyba m_0 je znatelně větší u systému IND než u AND a značně převyšuje i chyby u systémů NAD a EUR, což svědčí nejen o vyšší vnitřní kvalitě geodetického systému AND, ale také o malé použitelnosti údajů geodetického systému IND.

Z grafického znázornění velikosti oprav /v/ z vyrovnání - přílohy 5 a 6 - je zřejmé jejich zonální rozdělení /z hlediska znamének/, zvláště výrazné u systému IND. Z tohoto rozložení oprav a z jejich velikosti se dá také usuzovat na nevhodné rozměry použitého referenčního elipsoidu.

Tvarové vyjádření průběhu oprav /v/ izočarami - přílohy 7 a 8 - opět potvrzuje domněnku, že planetární geoid pravděpodobně nezachycuje mikrotvary.

b/ Pro transformaci geodetických systémů IND a AND do systému EUR bylo použito známých transformačních rovnic:

$$\begin{aligned} B_{\text{EUR}} &= B_{\text{IND}} + \Delta B_{31} , \\ L_{\text{EUR}} &= L_{\text{IND}} + \Delta L_{31} , \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} B_{\text{EUR}} &= B_{\text{AND}} + \Delta B_{32} , \\ L_{\text{EUR}} &= L_{\text{AND}} + \Delta L_{32} , \end{aligned} \quad (2)$$

v nichž indexem 1 je označen systém IND,

indexem 2 je označen systém AND

a indexem 3 je označen systém EUR.

Řešením dostaneme tyto rovnice pro určení transformačních rozdílů

pro převod systému IND do EUR:

$$\begin{aligned} \Delta B''_{31} &= + 197,5 A + 932,3 B + 212,6 C + 112,0 D + 0,000\,084\,82 E, \\ \Delta L''_{31} &= + 197,5 F + 932,3 G \end{aligned} \quad (3)$$

a pro převod systému AND do EUR

$$\begin{aligned} \Delta B''_{32} &= - 26,1 A + 56,8 B + 205,8 C + 228,0 D + 0,000\,028\,13 E, \\ \Delta L''_{32} &= - 26,1 F + 56,8 G. \end{aligned} \quad (4)$$

V rovnicích (3) a (4) použité koeficienty A až G jsou definovány ve VTO č. 1/1972, str. 11.

Grafické znázornění průběhu transformačních rozdílů ΔB a ΔL izočarami ukazují přílohy 9, 10, 11 a 12.

a/ Velmi dobré výsledky řešení u australského geodetického souřadnicového systému mimo jiné ukazují také na velmi dobré určení parametrů použitého referenčního elipsoidu.

b/ Naproti tomu rozbor přesnosti řešení v návaznosti na podkladové materiály ukazuje malou použitelnost údajů jihoasijského /indického/ geodetického systému pro další úlohy. Určit jednoznačně příčiny tohoto stavu bez podrobných znalostí o budování tohoto systému je však velmi obtížné.

Č á s t 2

K OTÁZCE PARAMETRŮ GEOCENTRICKÉHO REFERENČNÍHO ELIPSOIDU

Obecně lze usuzovat, že příčiny menší použitelnosti údajů některých světových referenčních geodetických souřadnicových systémů /konkrétně jihoasijského či indického systému IND/ pro řešení globálních úloh geodézie mohou mít určitou souvislost především s přesností určení parametrů použitého referenčního elipsoidu.

V dalším chci proto odvodit - na základě znalostí tvaru geoidu určeného z pozemních pozorování v oblastech jednotlivých geodetických referenčních systémů - parametry geocentrického referenčního elipsoidu, který by danému tvaru geoidu nejlépe vyhovoval.

K tomuto účelu uvádím možné řešení těchto úloh:

3. Transformace výšek geoidu / ζ_{ir} / nad referenčními elipsoidy jednotlivých geodetických systémů na výšky geoidu / ζ_{io-2} /, určené z pozemních pozorování, nad geocentrickým elipsoidem / a_o, α_o /

Pro výpočet byla použita rovnice (45) uvedená v [1] na str. 32, vyjadřující vzájemný vztah výšek geoidu nad referenčním a geocentrickým elipsoidem:

$$\zeta_{io} = \zeta_{ir} + \cos B_i \cos L_i \Delta X_{or} + \cos B_i \sin L_i \Delta Y_{or} + \sin B_i \Delta Z_{or} - \sqrt{1 - e_r^2 \sin^2 B_i} \Delta a_{or} + \frac{\sin^2 B_i}{\sqrt{1 - e_r^2 \sin^2 B_i}} a_r (1 - \alpha_r) \Delta \alpha_r, \quad (5)$$

v níž jsou

ζ_{ir}	- výška geoidu nad referenčním elipsoidem	
ζ_{io}	- výška geoidu nad geocentrickým elipsoidem	
$\Delta X_{or}, \Delta Y_{or}, \Delta Z_{or}$	- souřadnice středu referenčního elipsoidu vzhledem ke geocentru	
a_r	- velká poloosa	} referenčního elipsoidu
α_r	- zploštění	
e_r	- excentricita	
a_o	- velká poloosa	} geocentrického elipsoidu
α_o	- zploštění	
e_o	- excentricita	
$\Delta a_{or} = a_o - a_r$		
$\Delta \alpha_{or} = \alpha_o - \alpha_r$		

Pro rozměry geocentrického elipsoidu byly použity parametry vypočítané v [2] o hodnotách

$$a_o = 6\,378\,139 \text{ m}, \quad \alpha_o = 1:298,258 = 0,003\,352\,80, \quad e_o^2 = 0,006\,694\,3$$

V dalším bude označována

ζ_{io-1} - výška geoidu /určená z družicového pozorování/ nad použitým geocentrickým elipsoidem,

ζ_{io-2} - výška geoidu /určená z pozemního pozorování/ nad použitým geocentrickým elipsoidem,

ζ_{io-3} - výška geoidu /určená ze spojení družicového a pozemního pozorování/ nad použitým geocentrickým elipsoidem.

Vzhledem k tomu, že nebylo přihlíženo k výsledkům transformace systému IND, byly pro výpočet výšek geoidu / ζ_{i0-2} / použity výsledné hodnoty výšek určené jen z geodetických souřadnicových systémů EUR, NAD a AND.

Z výsledků transformace výšek geoidu / ζ_{ir} / nad referenčními elipsoidy jednotlivých geodetických systémů na výšky geoidu / ζ_{i0-2} / byl pak izočarami / $\zeta_{i0-2} = \text{konst.}$ / vyjádřen průběh výšek geoidu / ζ_{i0-2} / nad geocentrickým elipsoidem o výše uvedených parametrech / a_0, α_0 / viz příloha 13.

4. Upřesnění parametrů použitého geocentrického elipsoidu / a_0, α_0 / z výšek geoidu / ζ_{i0-2} /, určených v předcházející úloze č. 3

Při řešení tohoto úkolu předpokládáme, že výšky geoidu nad geocentrickým elipsoidem jsou zatíženy chybami, vzniklými nepřesným určením parametrů geocentrického elipsoidu.

V dalších úvahách vyjdeme z rovnic (40) a (45) uvedených v [1] a udávajících vztah mezi výškou geoidu, posunem středů referenčních elipsoidů a změnou parametrů referenčních elipsoidů.

Jelikož jde o dva soustředné elipsoidy /použitý a nově určovaný, upřesňovaný/, lišící se vzájemně pouze svými rozměry, budou členy, v nichž se vyskytují posuny středů elipsoidů, mít nulovou hodnotu.

Tedy

$$\zeta'_{i0} = \zeta_{i0} + \frac{\partial \zeta}{\partial a} da + \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} d\alpha, \quad (6)$$

po úpravě

$$\zeta'_{i0} = \zeta_{i0} - \sqrt{1 - e_0^2 \sin^2 B_i} \Delta a_0 + \frac{\sin^2 B_i}{\sqrt{1 - e_0^2 \sin^2 B_i}} a_0 (1 - \alpha_0) \Delta \alpha_0. \quad (7)$$

Podmínku pro výpočet nových výšek geoidu nad upřesněným geocentrickým elipsoidem stanovíme tak, aby $[p \zeta'_{i0} \zeta'_{i0}] = \text{min.}$

Použijeme-li symboliky z vyrovnávacího počtu a položíme-li $\zeta'_{i0} = v$, pak rovnici oprav můžeme napsat ve tvaru

$$v_i = A_i \Delta a_0 + B_i \Delta \alpha_0 + l_i, \quad (8)$$

v níž jsou

$$\begin{aligned} A_i &= -\sqrt{1 - e_0^2 \sin^2 B_i} \quad , \\ B_i &= \frac{\sin^2 B_i}{\sqrt{1 - e_0^2 \sin^2 B_i}} \alpha_0 (1 - \alpha_0) \quad , \\ l_i &= \zeta_{i0} \end{aligned} \quad (9)$$

Důležitou otázkou je určení váhy p v podmínce pro vyrovnání $[p_{vv}] = \min$.

Pro výpočet použijeme středních hodnot ζ_{i0-2} , které jsou aritmetickými průměry z pěti údajů ζ_{i0} /ve vrcholech a středu/ čtyřúhelníků ohraničených zeměpisnými souřadnicemi B a L skrokem $5^\circ \times 5^\circ$. Je zřejmé, že čím bude čtyřúhelník severněji nebo jižněji od rovníku, tím bude představovat menší plochu. Můžeme tedy za váhu p použít hodnoty $\cos B$, jíž je plocha zmíněných obrazců úměrná.

Pro podmínku vyrovnání $[p_{vv}] = \min$ budou normální rovnice pro výpočet neznámých Δa_0 a $\Delta \alpha_0$ mít tvar

$$\begin{aligned} [p_{AA}] \Delta a_0 + [p_{AB}] \Delta \alpha_0 + [p_{Al}] &= 0 \quad , \\ [p_{AB}] \Delta a_0 + [p_{BB}] \Delta \alpha_0 + [p_{Bl}] &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (10)$$

Řešením těchto normálních rovnic vypočteme neznámé opravy parametrů použitého geocentrického elipsoidu Δa_0 a $\Delta \alpha_0$.

Příslušnou jednotkovou střední chybu m_0 a střední chyby oprav parametrů $m_{\Delta a_0}$ a $m_{\Delta \alpha_0}$ určíme z rovnic

$$\begin{aligned} m_0 &= \pm \sqrt{\frac{[p_{vv}]}{n-2}} \quad , \\ m_{\Delta a_0} &= \pm m_0 \sqrt{Q_{11}} \quad , \\ m_{\Delta \alpha_0} &= \pm m_0 \sqrt{Q_{22}} \quad . \end{aligned} \quad (11)$$

Váhové koeficienty Q_{11} a Q_{22} určíme z rovnicových dvojic

$$\begin{aligned} Q_{11} \cdot \cdot \cdot [p_{AA}] Q_{11} + [p_{AB}] Q_{12} &= 1 \quad , \\ [p_{AB}] Q_{11} + [p_{BB}] Q_{12} &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Q_{22} \cdot \cdot \cdot [p_{AA}] Q_{21} + [p_{AB}] Q_{22} &= 0 \quad , \\ [p_{AB}] Q_{21} + [p_{BB}] Q_{22} &= 1 \quad . \end{aligned} \quad (13)$$

Výsledné rozměry parametrů upřesněného geocentrického elipsoidu budou

$$\begin{aligned} a' &= a_0 + \Delta a_0 \quad , \\ \alpha' &= \alpha_0 + \Delta \alpha_0 \quad . \end{aligned} \quad (14)$$

5. Kontrolní určení parametrů použitého geocentrického elipsoidu / a_0, α_0 / z družicových pozorování

V bodovém poli, daném vrcholy čtyřúhelníků ohraničených zeměpisnými souřadnicemi B a L s krokem $10^\circ \times 10^\circ$ byly s dostatečnou přesností vypočteny výšky geoidu nad geocentrickým elipsoidem / ζ_{i0-1} / o parametrech, totožných s parametry použitého referenčního elipsoidu podle rovnice

$$\zeta_{i0-1} = \varphi \text{ geoidu} - \varphi \text{ elipsoidu}$$

O výpočtu výšek geoidu nad použitým geocentrickým elipsoidem je podrobněji pojednáno v [1], kap. 3.2.3. Jejich průběh je tvarově vyjádřen izočarami / $\zeta_{i0-1} = \text{konst.}$ / v příloze 14.

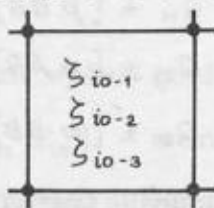
Při vlastním výpočtu oprav parametrů geocentrického elipsoidu / a_0, α_0 / z výšek geoidu / ζ_{i0-1} / bylo postupováno s použitím počítače stejným způsobem jako v předcházející úloze, tj. podle rovnic (6) - (14).

6. Kontrolní určení parametrů použitého geocentrického elipsoidu / a_0, α_0 / ze spojených výsledků družicového a pozemního pozorování

Pro tento výpočet bylo použito výšek geoidu / ζ_{i0-3} / nad geocentrickým elipsoidem, určených spojením družicových a pozemních pozorování; přitom výšky geoidu, určené z družicových pozorování / ζ_{i0-1} /, byly použity všude tam, kde nebyly známy výšky geoidu z pozemních pozorování / ζ_{i0-2} /.

Příloha 15 ukazuje grafický průběh výšek geoidu / ζ_{i0-3} /. Řešení této úlohy bylo provedeno na počítači opět podle rovnic (6) - (14).

V příloze 16 je schématický přehled výšek geoidu / $\zeta_{i0-1,2,3}$ / pro všechny tři případy jejich určení; výšky jsou vyznačeny ve čtyřúhelnících, ohraničených zeměpisnými souřadnicemi B a L s krokem $5^\circ \times 5^\circ$, takto:



Hodnoty / $\zeta_{i0-1,2,3}$ / jsou aritmetickými průměry z pěti údajů ζ_{i0} ve vrcholech a středu čtyřúhelníku.

Všechny údaje v grafických přílohách 13 - 16 jsou v metrech.

7. Přehled výsledků kontrolních určení parametrů použitého geocentrického elipsoidu udávající tabulky 1 a 2

Tabulka 1

Opravy parametrů a střední chyby	Hodnoty oprav parametrů geocentrického elipsoidu určené z pozorování		
	družicového	pozemního	družic. a pozem. /spojeného/
	na 2268 bodech	na 203 bodech	na 2268 bodech
Δa_0	- 0,6 m	- 2,6 m	- 0,4 m
$\Delta \alpha_0$	- 0,000 000 37	+ 0,000 000 43	- 0,000 000 20
m_0	$\pm 22,8$ m	$\pm 24,9$ m	$\pm 24,1$ m
$m_{\Delta a_0}$	$\pm 0,8$ m	$\pm 4,6$ m	$\pm 0,9$ m
$m_{\Delta \alpha_0}$	$\pm 0,000 000 31$	$\pm 0,000 001 54$	$\pm 0,000 000 33$

Tabulka 2

Parametry použitého geocentrického elipsoidu	Parametry upřesněného geocentrického elipsoidu podle rovnice (14)		
①	②	③	④
$a_0 = 6\,378\,139$ m	$a' = 6\,378\,138$ m	6 378 136 m	6 378 139 m
$\alpha_0 = 0,003\,352\,80$	$\alpha' = 0,003\,352\,43$	0,003 353 23	0,003 352 60
$\alpha_0 = 1:298,258$	$\alpha' = 1:298,291$	1:298,220	1:298,276
$b_0 = 6\,356\,754$ m	$b' = 6\,356\,756$ m	6 356 749 m	6 356 756 m

Z á v ě r y z č á s t i 2

a/ Parametry použitého geocentrického elipsoidu / a_0, α_0 /, určené v [2] a vypočítané mnou / a', α' / z družicových pozorování v této práci jsou prakticky stejné /viz tabulka 2, varianta ① a ② /.

b/ Parametry upřesněného geocentrického elipsoidu, určené z družicového pozorování a ze spojení družicového a pozemního pozorování, jsou rovněž prakticky totožné / ② a ④ /.

c/ Parametry upřesněného geocentrického elipsoidu, určené z pozemního pozo-

rování / ② /, jsou původním hodnotám / α_o, α_o / velmi blízké přesto, že pro jejich výpočet byla k dispozici pouze asi jedna desetina celkového počtu údajů, použitých při výpočtech ① a ③ .

d/ Výsledky ukazují, že navržený postup řešení je vhodný pro určení parametrů geocentrického elipsoidu.

e/ Výpočetní výsledky ② potvrzují správnost všech dřívějších výpočtů, tj. souřadnic středů /posunů/ referenčních elipsoidů / $\Delta X_{or}, \Delta Y_{or}, \Delta Z_{or}$ / vzhledem ke geocentrickému souřadnicovému systému, jakož i správnost převodů výšek geoidu nad referenčními elipsoidy na geocentrický elipsoid.

Možné nepřesnosti dříve provedených transformací dílčích referenčních geodetických systémů na jednotlivých kontinentech nebo jejich částech do systému geocentrického se prakticky vůbec neprojeví a lze proto soudit o poměrně vysoké kvalitě všech odvozených transformačních elementů.

f/ Při řešení úloh tohoto druhu - za předpokladu, že byly správně vypočteny výchozí parametry geocentrického elipsoidu - musí opravy v ve velké většině mít stejné znaménko a přibližně i stejnou velikost jako ve výpočtu použité výšky geoidu / ζ_{io} /, protože opravy představují taktéž výšky geoidu, ovšem nad geocentrickým elipsoidem s opravenými parametry.

g/ Spojení výsledků pozemních s družicovými bylo uskutečněno s takovou přesností, že se možné místní deformace prakticky vůbec neprojeví.

h/ Místní undulace geoidu v oblastech, z nichž byly použity vstupní údaje ve variantě ②, které existují, nemají takové amplitudy a nejsou tak systematické povahy, aby prakticky výsledky ovlivnily.

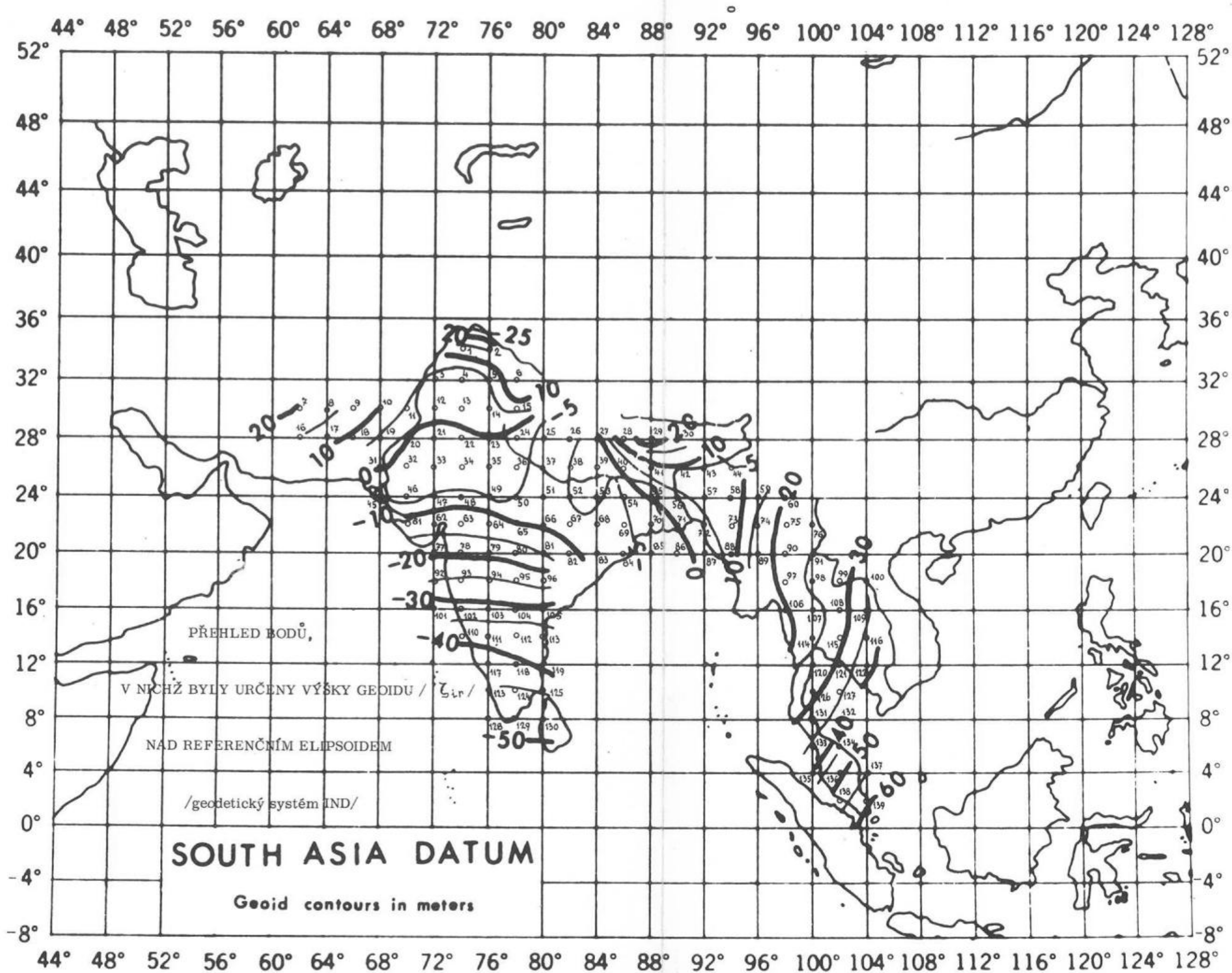
i/ Lokální undulace geoidu, indikované jen pozemním měřením a často vůbec nepostižitelné metodami družicovými, se prakticky neprojeví a nemají tedy na určované parametry podstatný vliv.

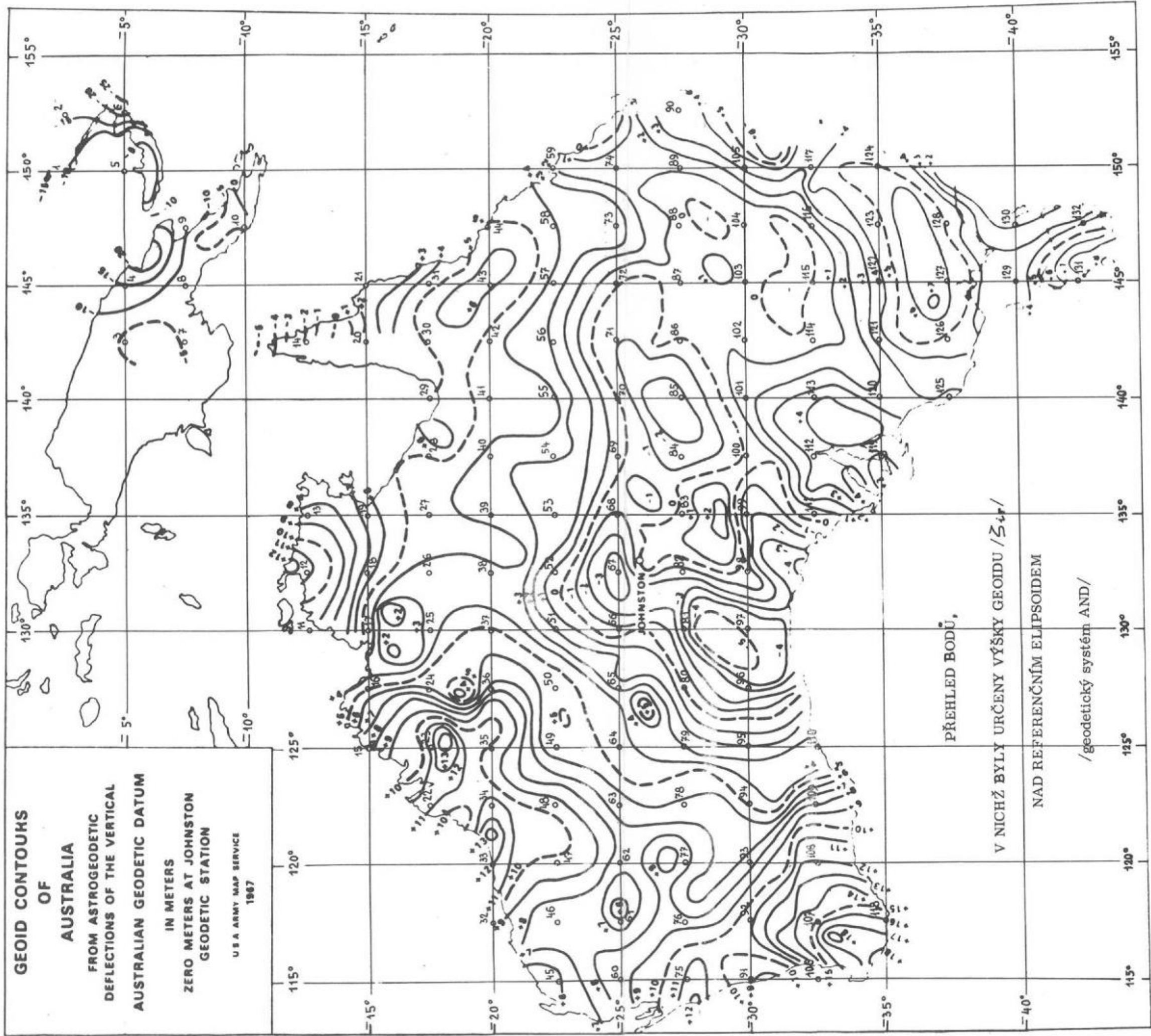
j/ Parametry geocentrického elipsoidu, nejbližší se přibližujícího ke geoidu jen v oblastech kontinentů, se prakticky neliší od parametrů celozemského geocentrického elipsoidu, nahrazujícího geoid celé planety.

L I T E R A T U R A

- [1] V. VAHALA: Geodetické sítě malého rozsahu, jejich transformace a transformace světových referenčních geodetických systémů. /Kandidátská disertační práce - 1971/.
- [2] M. BURŠA: Fundamental Geodetic Parameters of the Earth s Figure and the Structure of the Earth's Field Derived from Satellite Data, Prague, June 1971.
- [3] A. A. IZOTOV: Forma i razmery Zemli po sovremennym dannym. Trudy CNIIGAIK 73, 1950, Moskva.

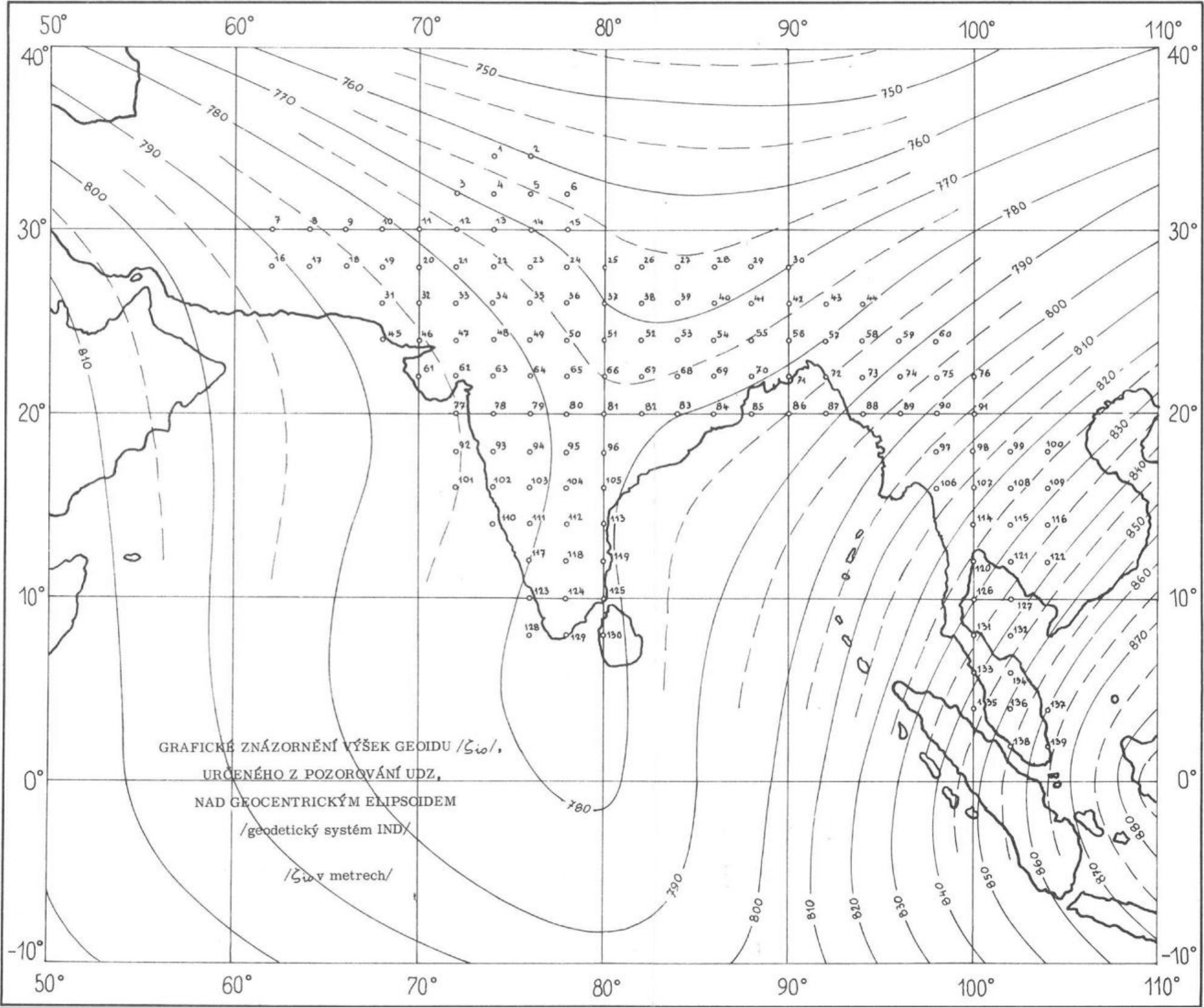
Došlo dne 11. 4. 1973.



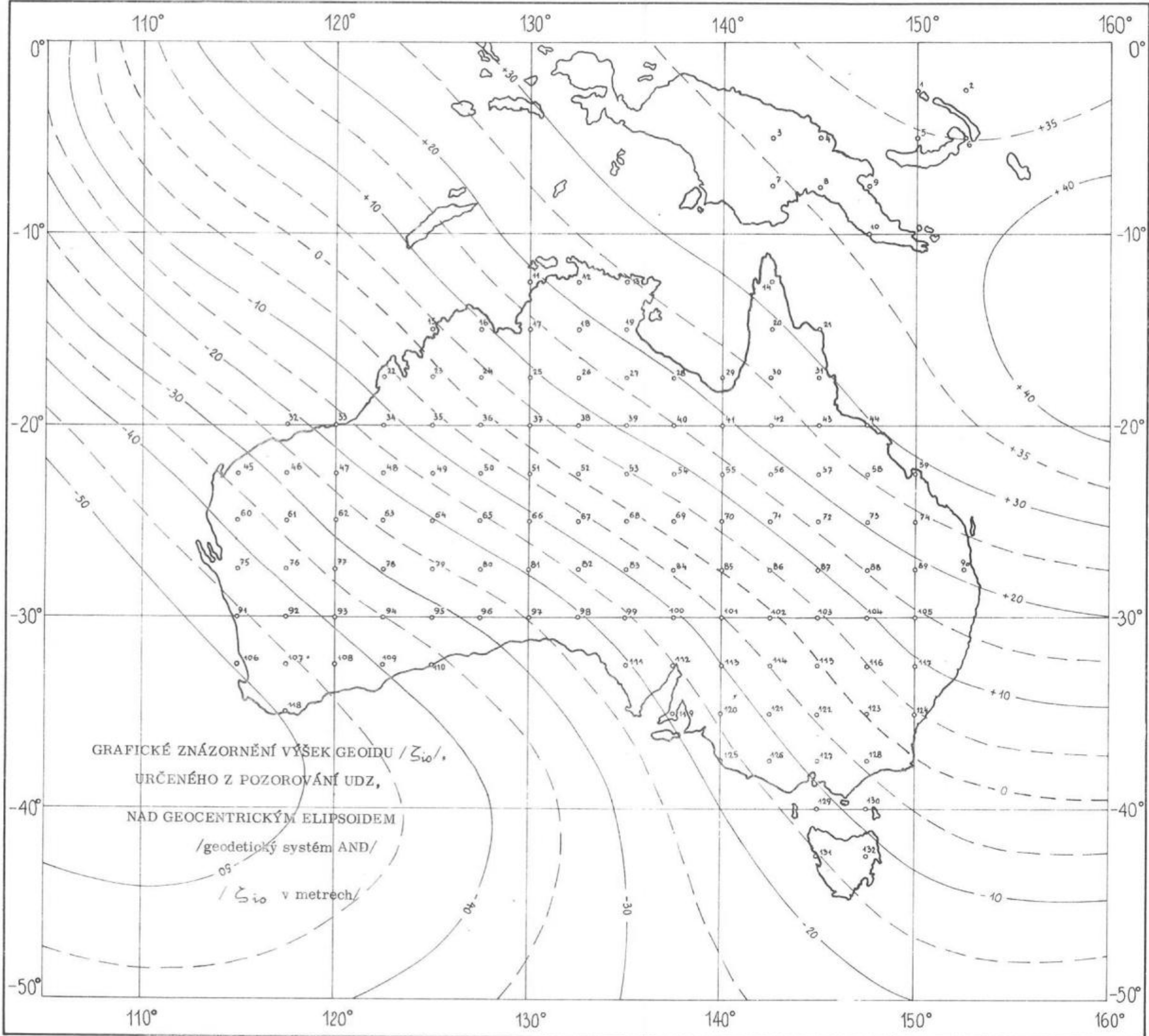


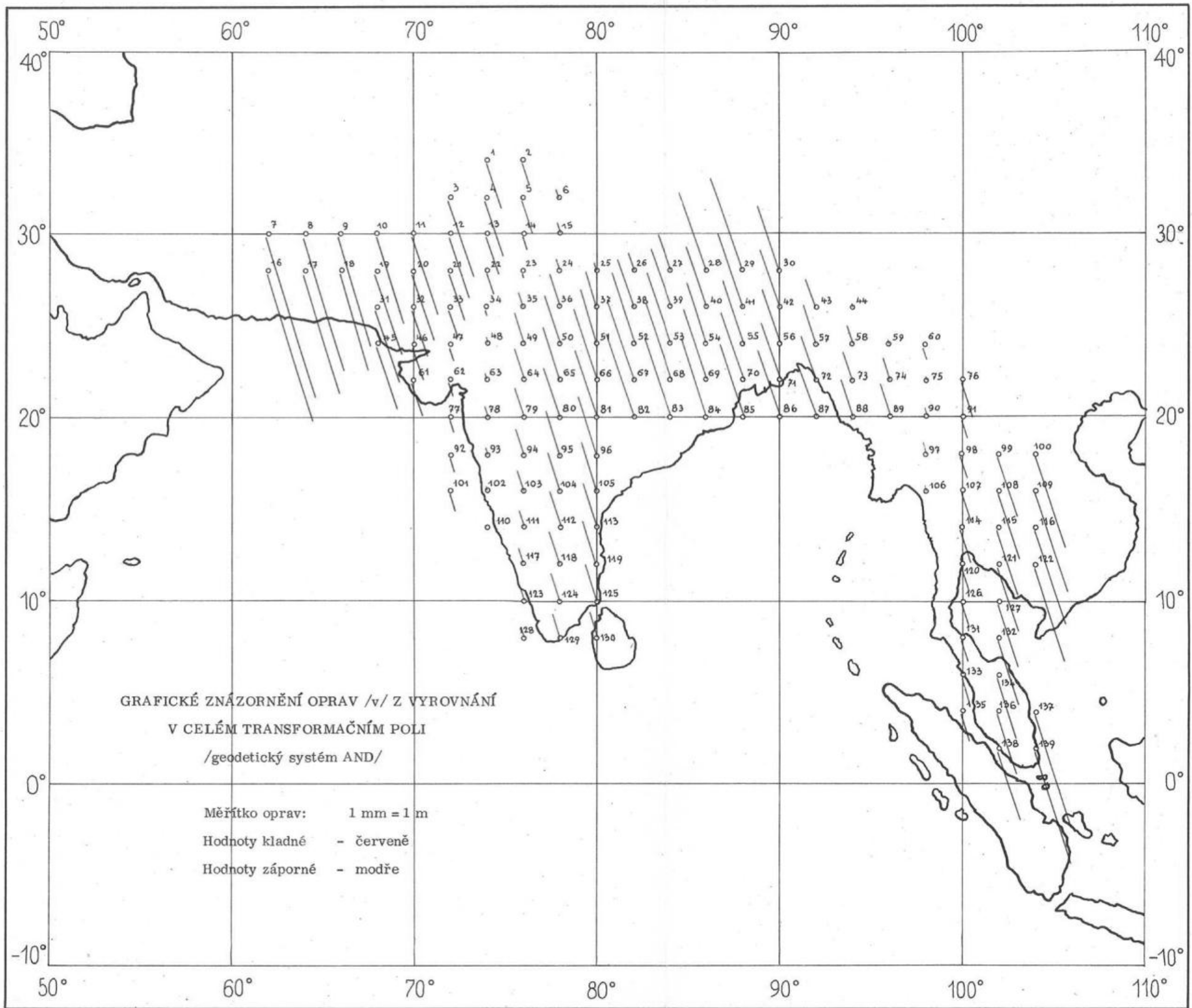
**GEOID CONTOURS
OF
AUSTRALIA**
FROM ASTROGEODETTIC
DEFLECTIONS OF THE VERTICAL
AUSTRALIAN GEODETTIC DATUM
IN METERS
ZERO METERS AT JOHNSTON
GEODETTIC STATION
U.S. ARMY MAP SERVICE
1967

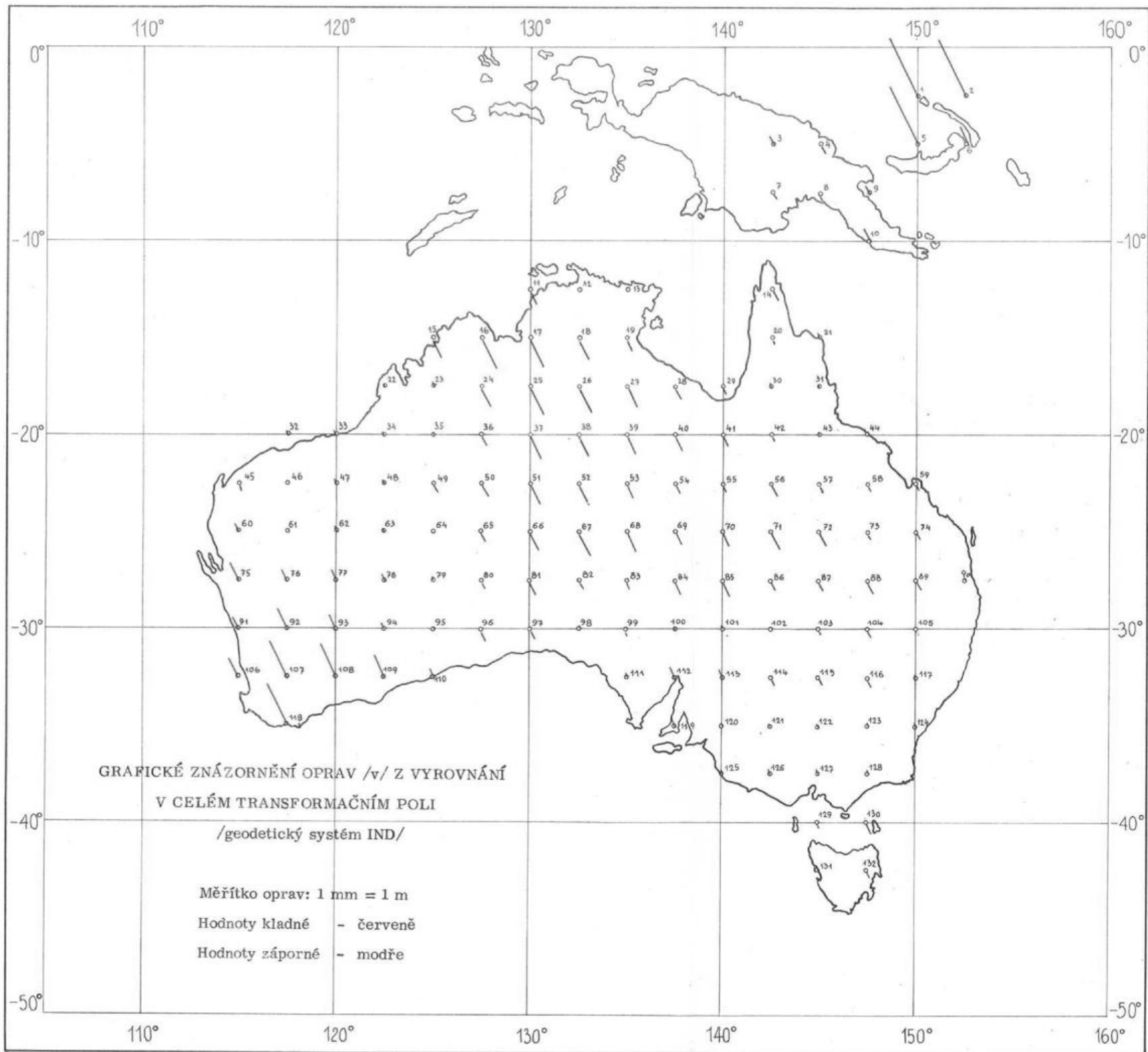
PŘEHLED BODŮ,
V NICHŽ BYLY URČENY VÝŠKY GEOIDU / Ž /
NAD REFERENČNÍM ELIPSOIDEM
/ geodetický systém AND /

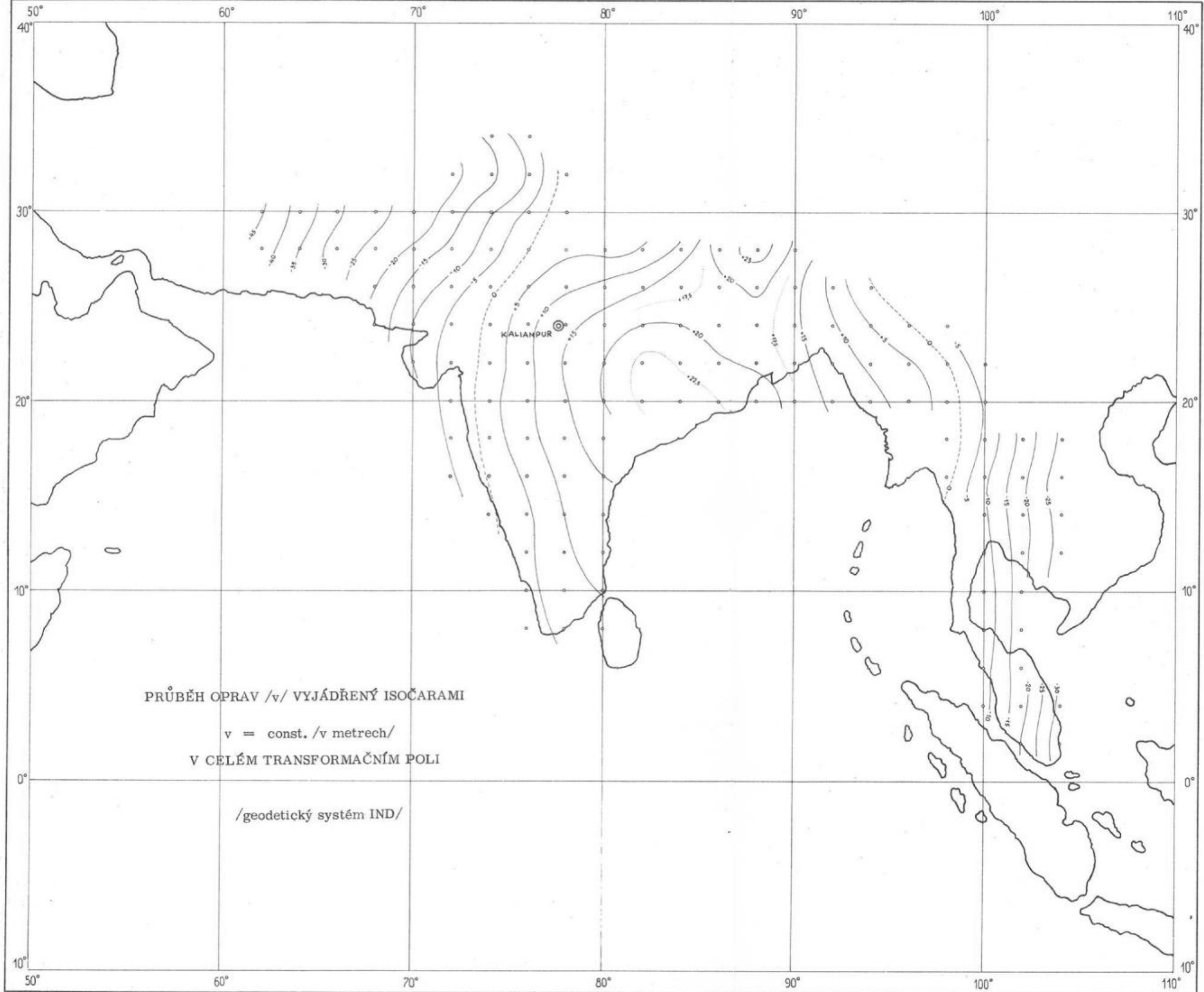


GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ VÝŠEK GEOIDU ζ_{io} ,
URČENÉHO Z POZOROVÁNÍ UDZ,
NAD GEOCENTRICKÝM ELIPSOIDEM
/geodetický systém IND/
/ ζ_{io} v metrech/





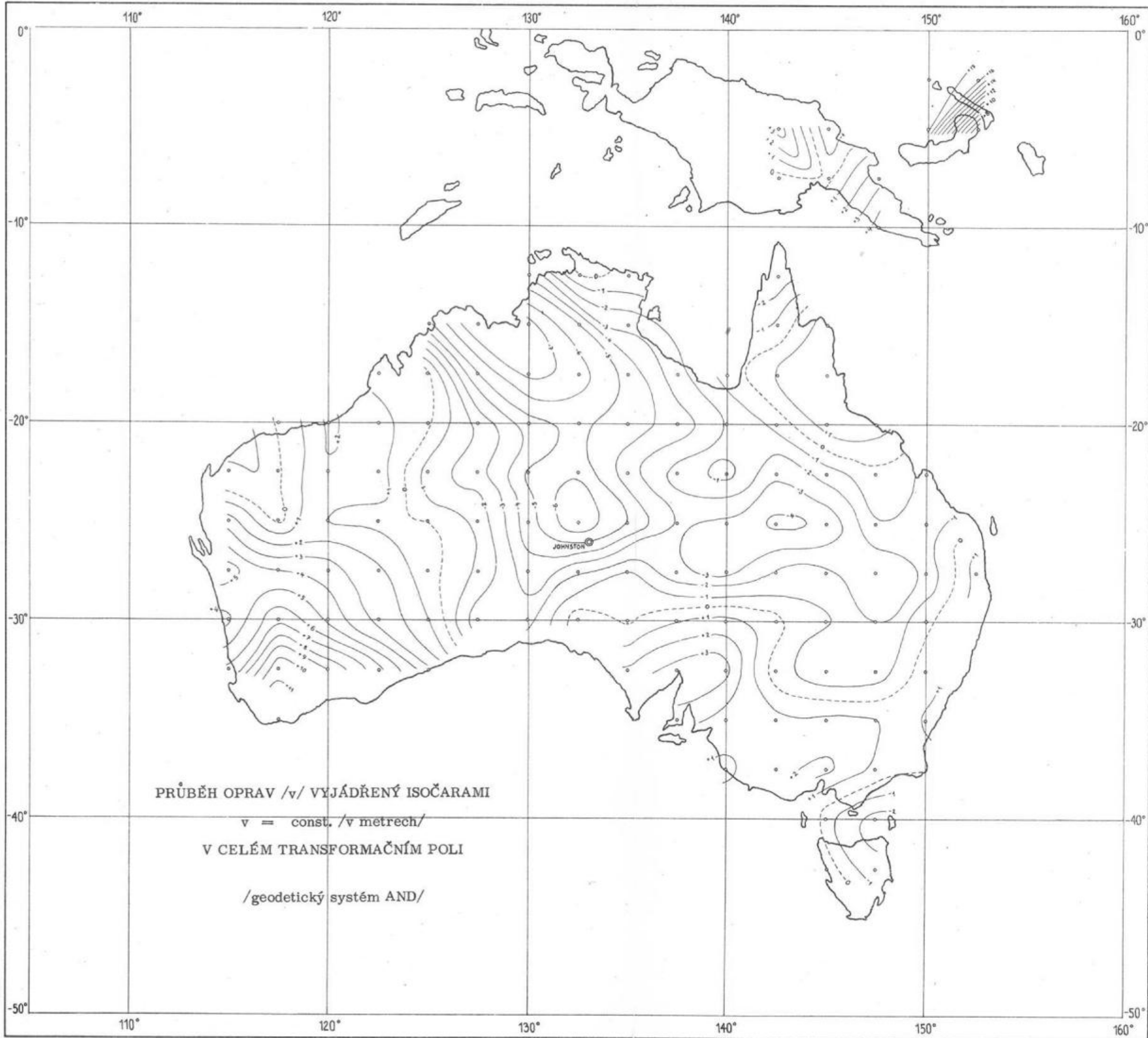


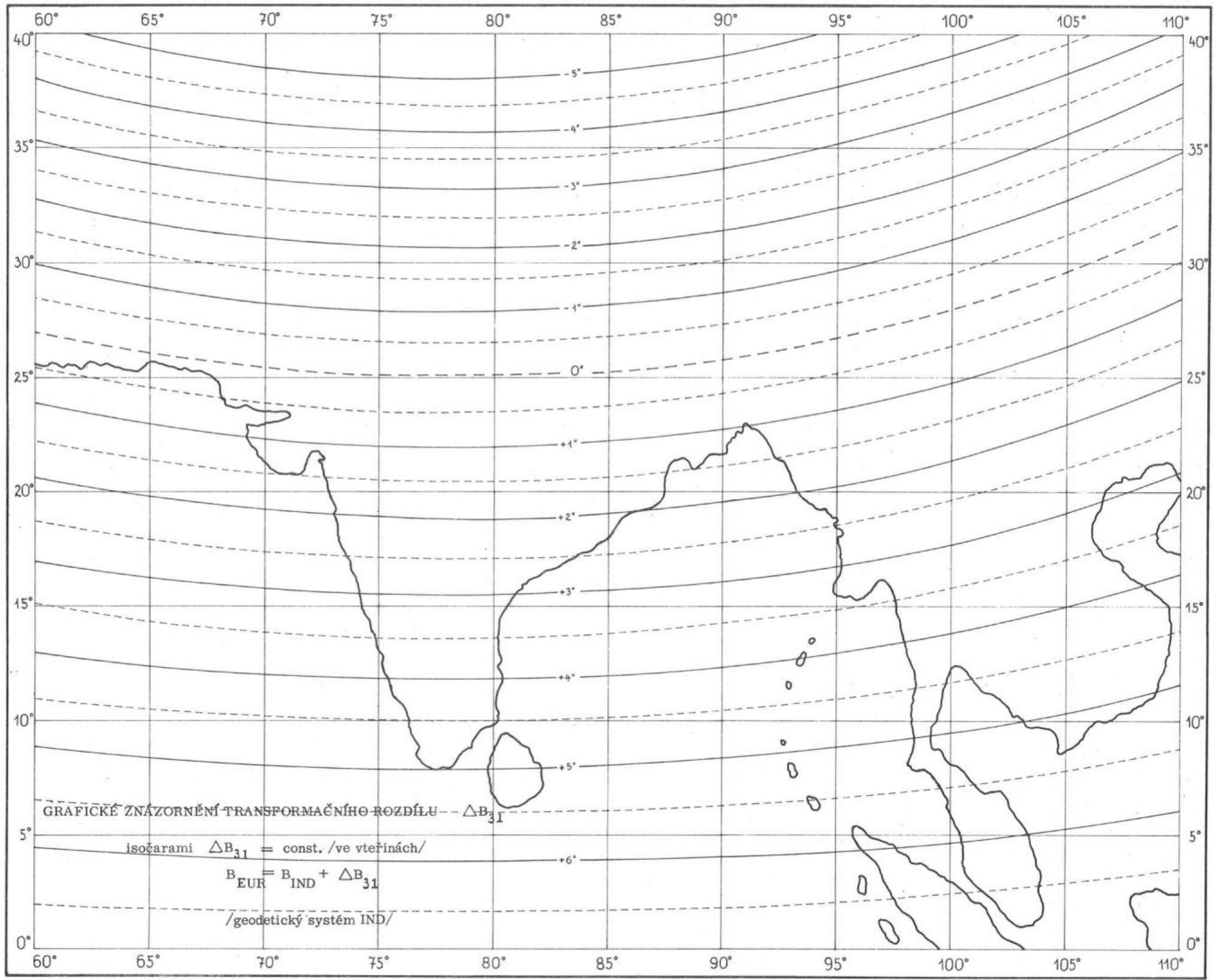


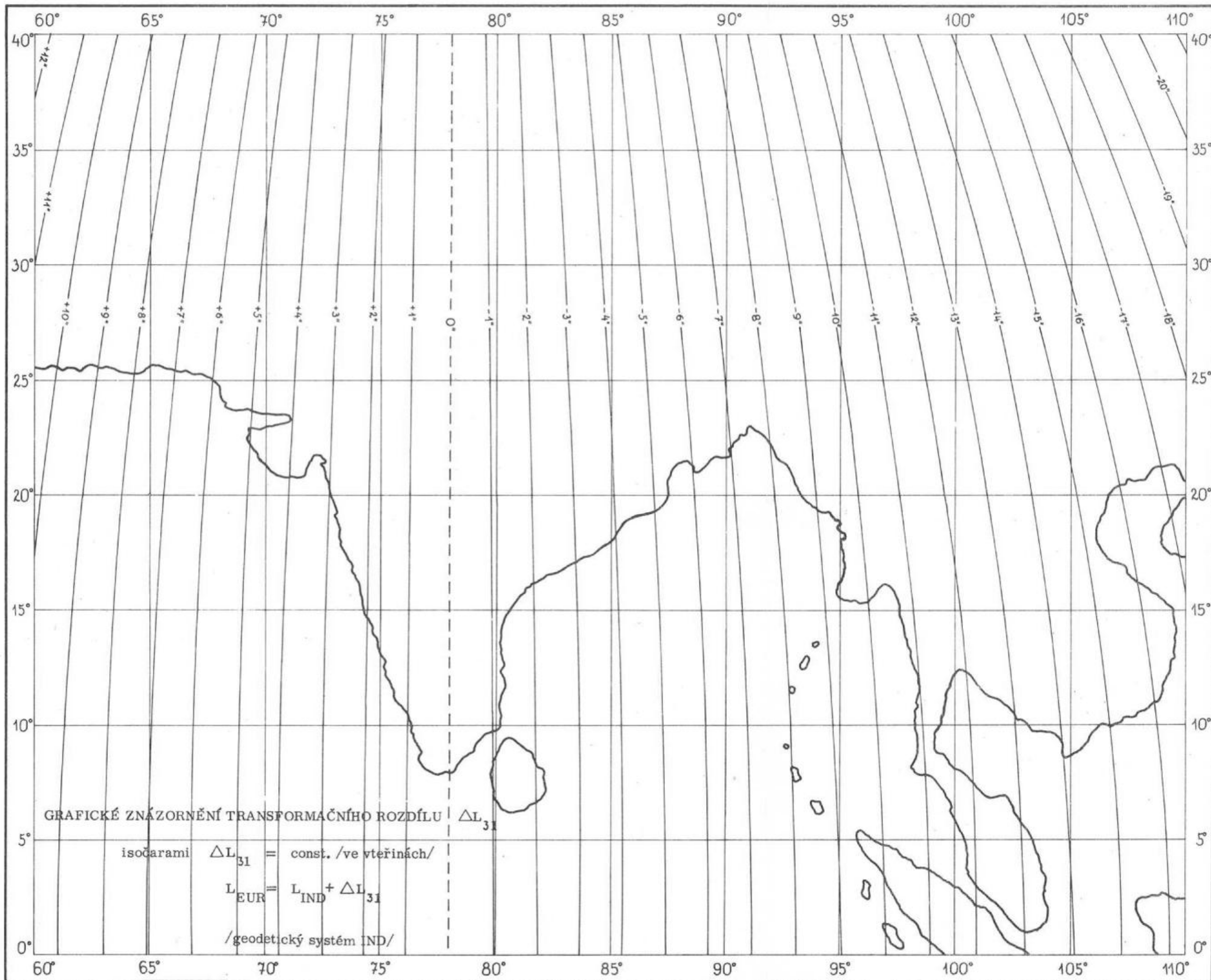
PRŮBĚH OPRAV /v/ VYJÁDŘENÝ ISOČARAMI

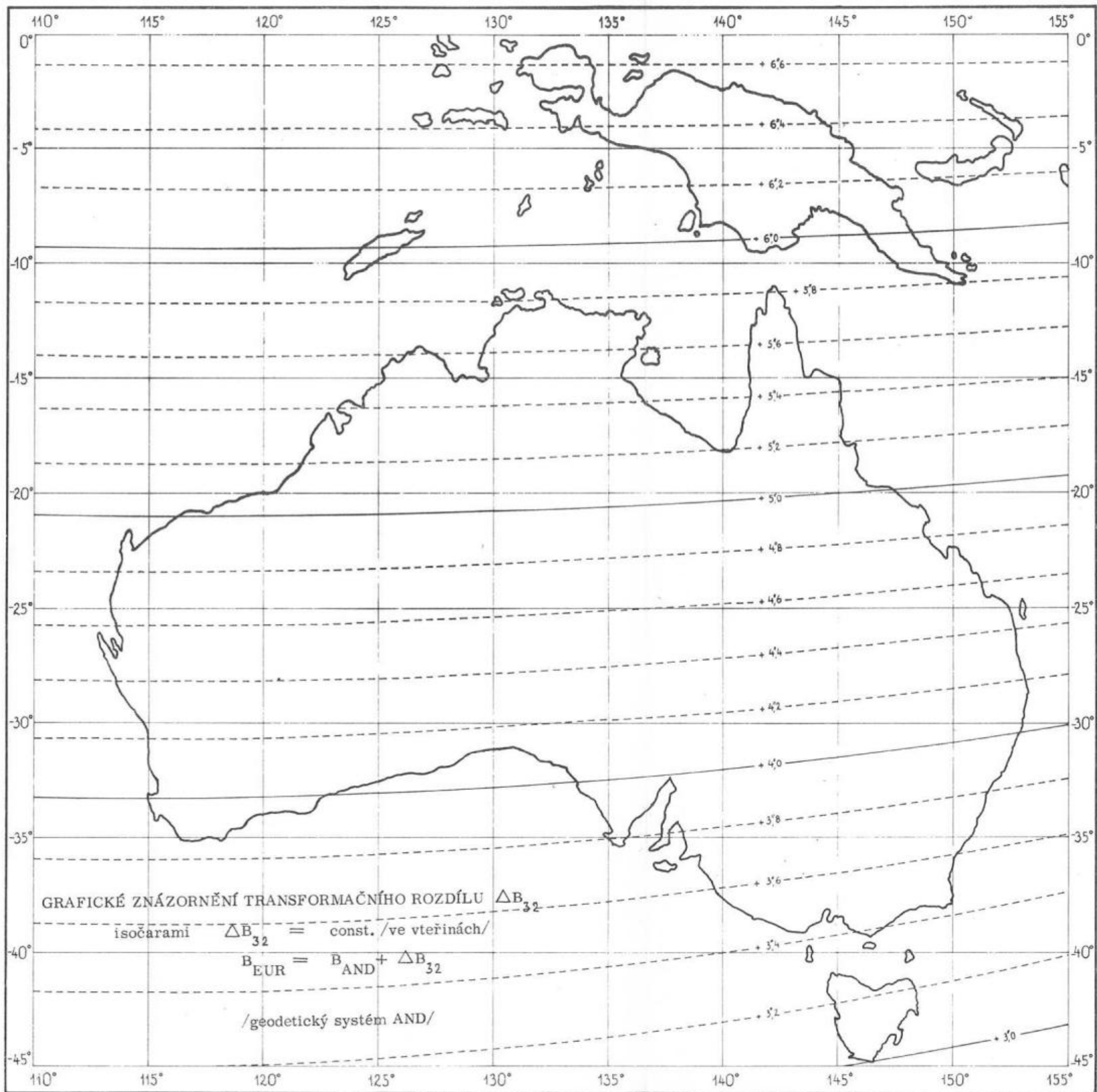
v = const. /v metrech/
V CELÉM TRANSFORMAČNÍM POLI

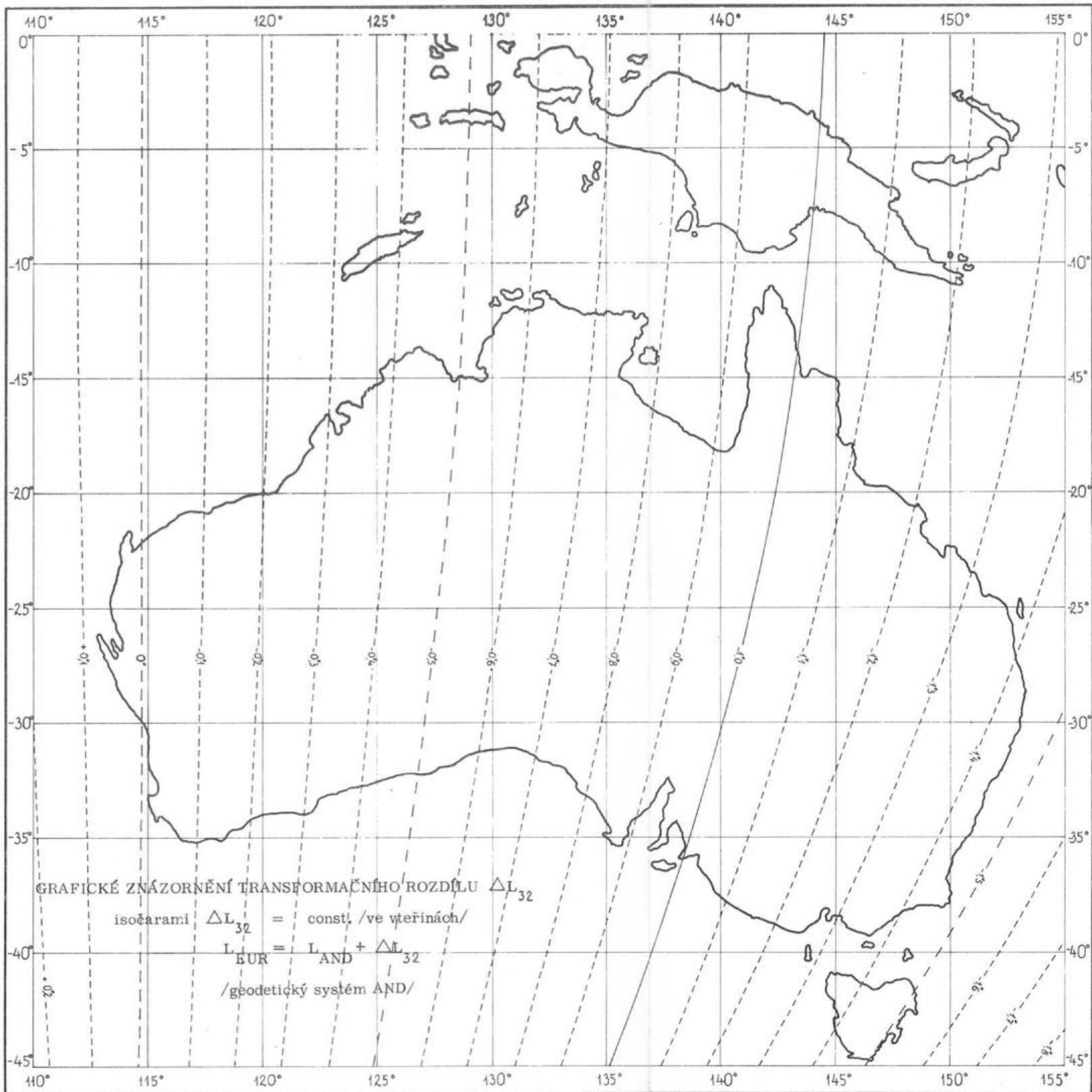
/geodetický systém IND/

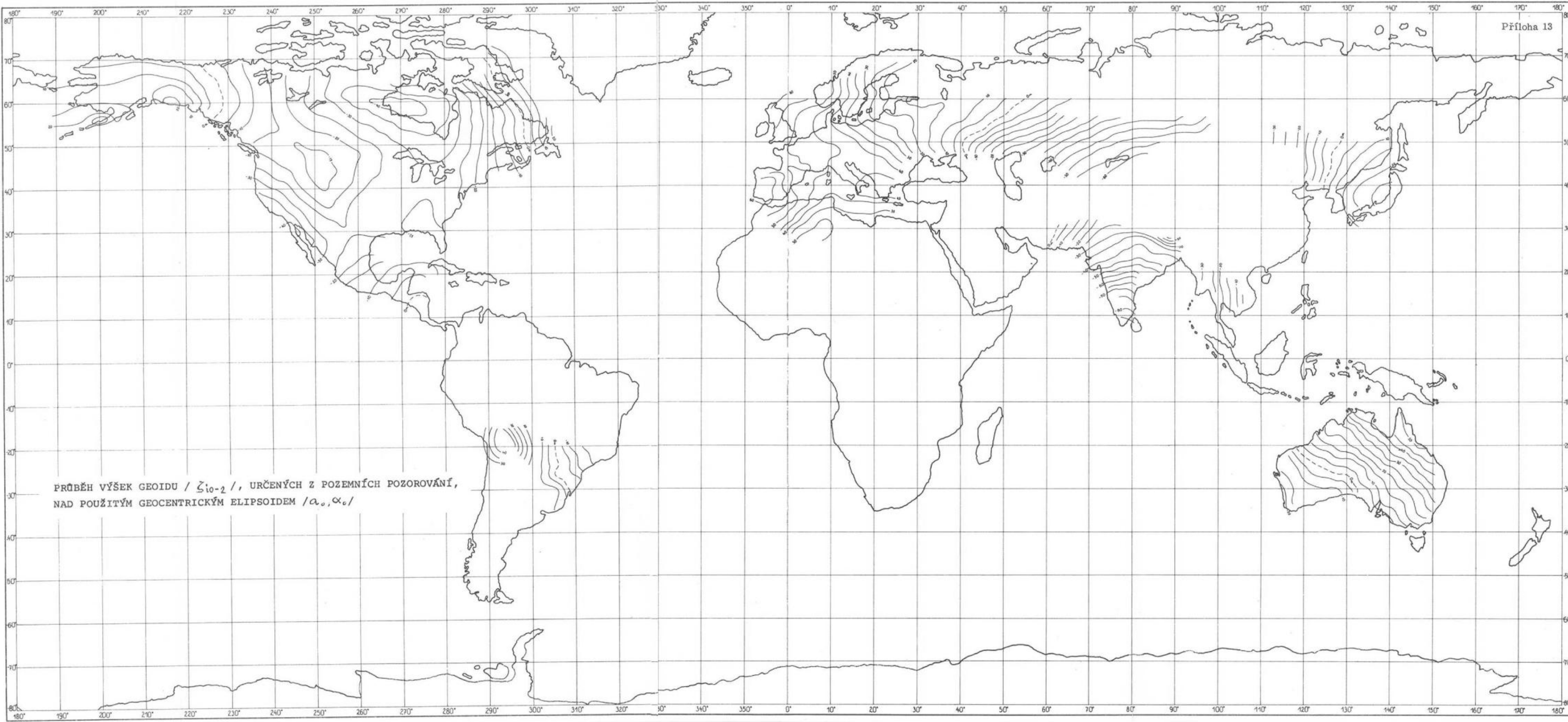




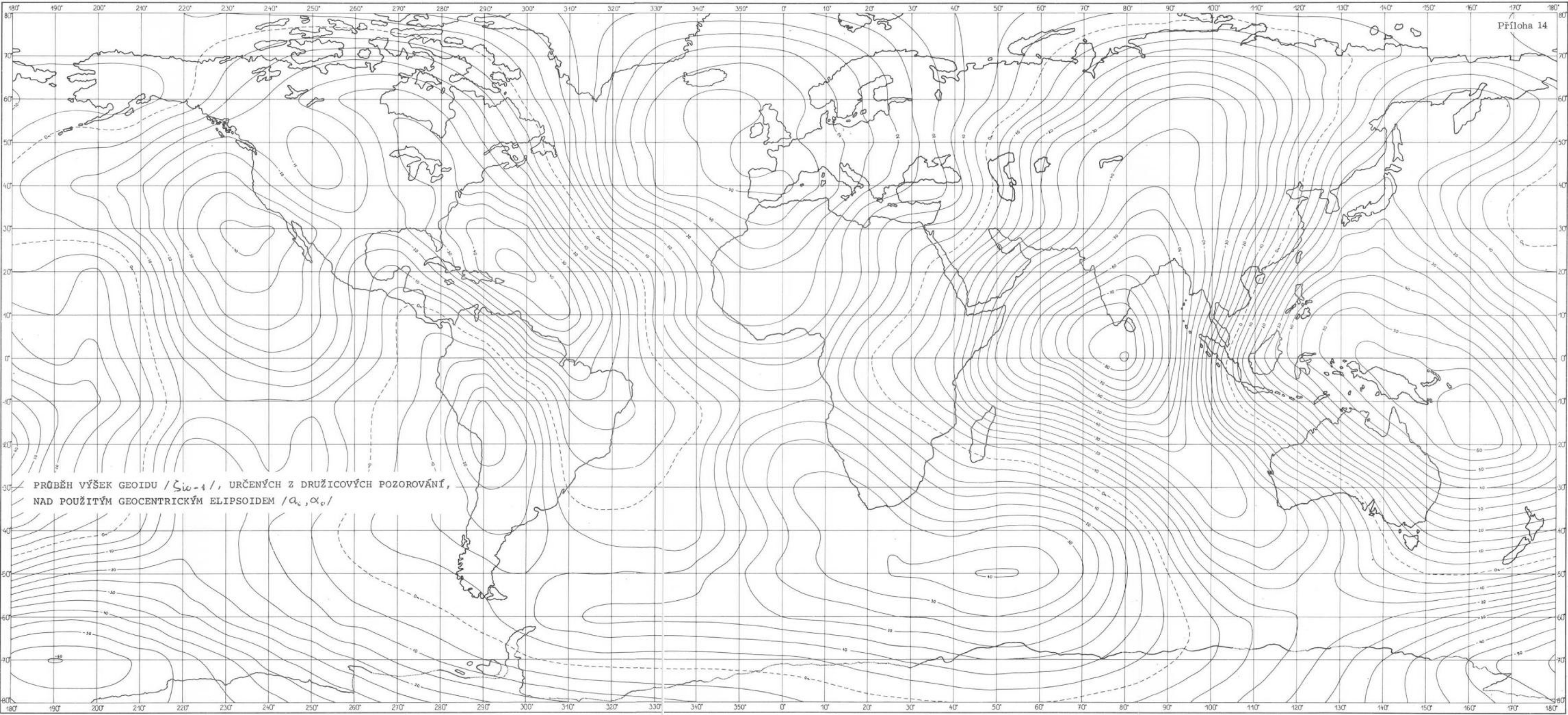




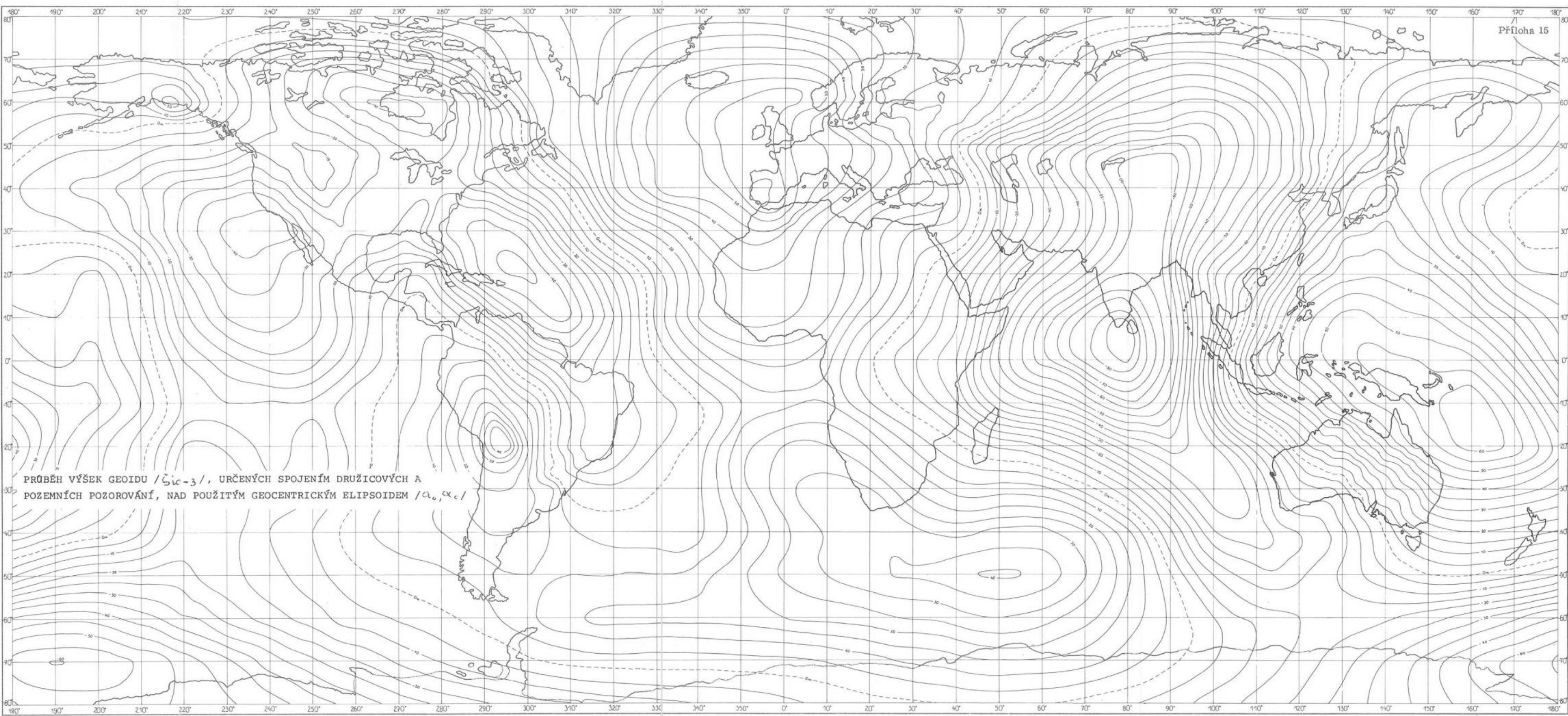




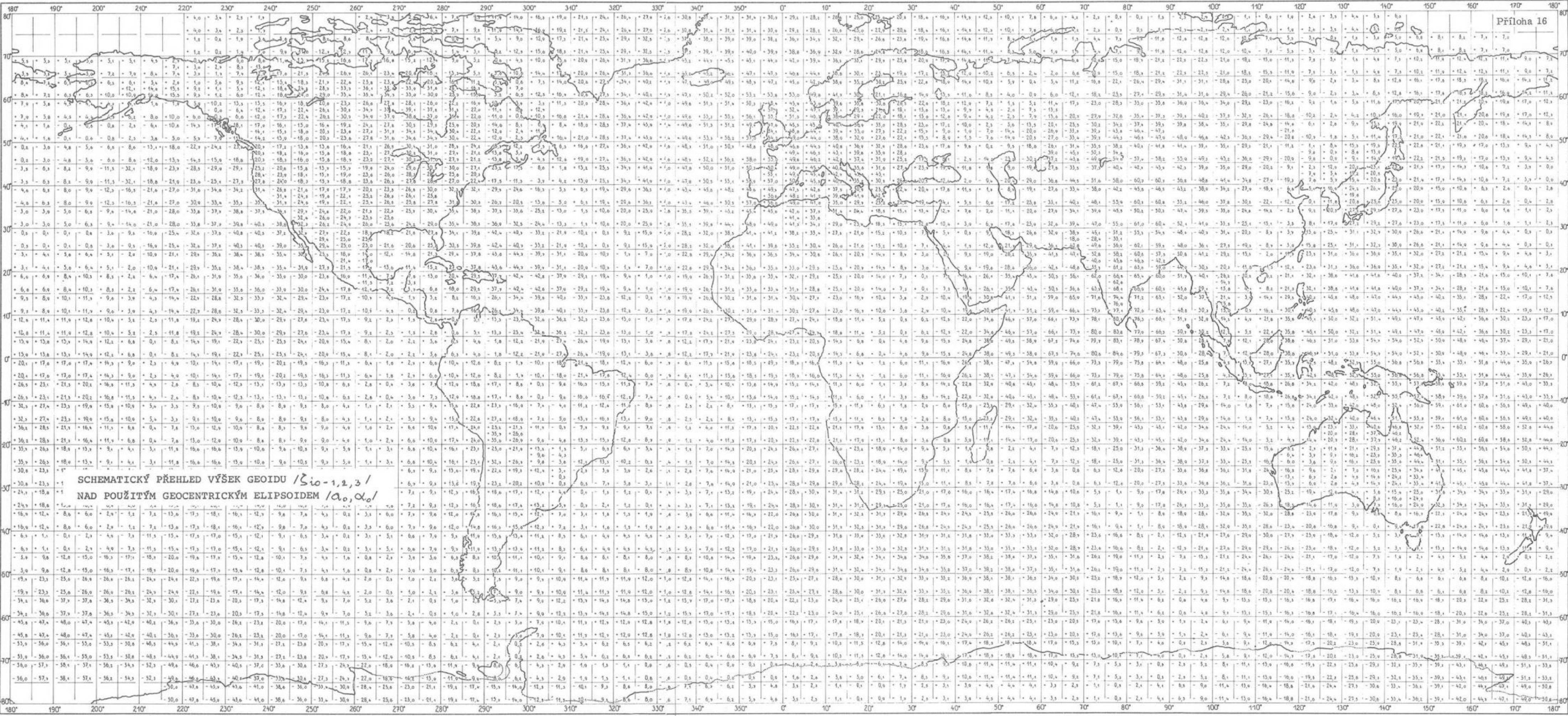
PRŮBĚH VÝŠEK GEOIDU / ζ_{10-2} /, URČENÝCH Z POZEMNÍCH POZOROVÁNÍ,
NAD POUŽITÝM GEOCENTRICKÝM ELIPSOIDEM / α_0, α_0 /



PRŮBĚH VÝŠEK GEOIDU / $\zeta_{\omega-1}$ /, URČENÝCH Z DRUŽICOVÝCH POZOROVÁNÍ,
NAD POUŽITÝM GEOCENTRICKÝM ELIPSOIDEM / a_e, α_e /



PRŮBĚH VÝŠEK GEOIDU / ζ_{c-3} /, URČENÝCH SPOJENÍM DRUŽICOVÝCH A POZEMNÍCH POZOROVÁNÍ, NAD POUŽITÝM GEOCENTRICKÝM ELIPSOIDEM / α_0, α_c /



SCHEMATICKÝ PŘEHLED VÝŠEK GEOIDU / $\zeta_{10-1,2,3}$ /
 NAD POUŽITÝM GEOCENTRICKÝM ELIPSOIDEM / α_0, α_0 /

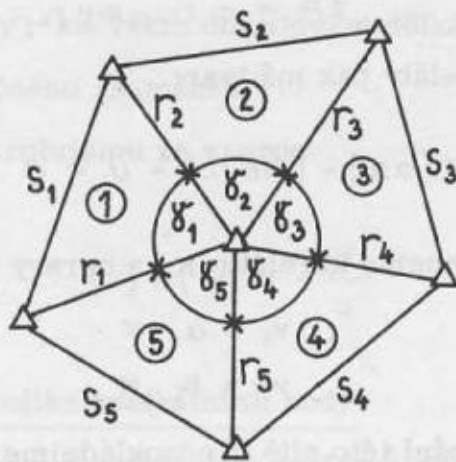
Přibližné vyrovnání délkových sítí podle podmínek

Ú v o d

Při geodetickém zabezpečení vojsk určujeme velmi často souřadnice bodů z měřených délek. Využíváme přitom s výhodou vlastností rádiových dálkoměrů, tj. poměrně značného dosahu, rychlosti měření a jen velmi malé závislosti na povětrnostních podmínkách. Výpočet souřadnic bodů z měřených délek z nutných prvků je jednoduchý a nečiní potíže. Při zaměření nadbytečných délek v síti jsme nuceni řešit problém vyrovnání takových sítí. Exaktní metody vyrovnání podle metody nejmenších čtverců jsou však zdlouhavé a pro výpočet v polních podmínkách bez použití samočinných počítačů nevhodné. Například jen v jednoduché síti s jedním centrálním bodem o šesti trojúhelnících budeme při vyrovnání podle měření zprostředkujících počítat celkem 9 přibližných délek ze souřadnic, 38 koeficientů rovnic oprav a řešit soustavu 12 až 14 normálních rovnic /podle počtu daných bodů v síti/. Vyrovnání téže sítě podle podmínkových měření povede sice jen na jednu podmínkovou rovnici, výpočet koeficientů podmínkových rovnic je však poměrně složitý a zdlouhavý /viz rovnice (4)/. Přitom exaktní vyrovnání není dostatečně zdůvodněno již proto, že není splněn předpoklad metody nejmenších čtverců, tj. dostatečně velký počet nadbytečných měření.

1. Přibližné vyrovnání sítě s jedním centrálním bodem

Pro odvození přibližné metody vyrovnání délkové sítě vyjdeme z vyrovnání délkové sítě podle podmínek. V síti s měřenými délkami podle obr. 1 platí podmínková rovnice:



Obr. 1

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 - 360^\circ = 0 \quad (1)$$

nebo: $[r] - 360^\circ = 0$

a příslušná rovnice odchylková: $(1a)$

$$[r'] - 360^\circ = U$$

Úhly r'_i podle cosinové věty jsou:

$$r'_i = \arccos \frac{r_i^2 + r_{i+1}^2 - s_i^2}{2r_i r_{i+1}} \quad (2)$$

kde s_i jsou měřené obvodové délky a

r_i jsou radiální délky.

Linearizací podmínkových rovnic podle [1] dostaneme přetvořené podmínkové rovnice:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + a_5 v_5 + b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3 + b_4 w_4 + b_5 w_5 + U = 0 \quad (3)$$

nebo:

$$[av] + [bw] + U = 0,$$

kde U je úchylka odchylkové rovnice (1a) ve vteřinách,

v_i jsou opravy měřených délek s_i ,

w_i jsou opravy měřených délek r_i .

Koeficienty přetvořených podmínkových rovnic jsou:

$$a_i = \frac{s_i}{r_i r_{i+1} \sin r_i} \varrho'' = \frac{s_i}{2P_i} \varrho'' \quad (4)$$

$$b_i = \left(\frac{r_{i-1} \cos r_{i-1} - r_i}{2P_{i-1}} + \frac{r_{i+1} \cos r_i - r_i}{2P_i} \right) \varrho'' ,$$

kde

$$2P_i = r_i r_{i+1} \sin \gamma_{2i}$$

Normální rovnice pro koreláty pak má tvar:

$$([aa] + [bb]).K + U = 0 \quad (5)$$

Řešením rovnice (5) dostaneme korelátu K a opravy délek:

$$\begin{aligned} v_i &= a_i \cdot K \\ w_i &= b_i \cdot K \end{aligned} \quad (6)$$

Pro přibližné vyrovnaní této sítě předpokládejme, že trojúhelníky v obr. 1 jsou rovnostranné. Pak platí:

$$\begin{aligned} s_1 = s_2 = \dots = s_i = r_1 = r_2 = \dots = r_i = s \\ \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_i = \gamma = 60^\circ \end{aligned} \quad (7)$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnic (4), dostaneme:

$$\begin{aligned} a &= \frac{s}{s^2 \sin 60^\circ} \cdot \varphi'' = \frac{\varphi''}{s \cdot 0,8660} \\ b &= \left(\frac{s \cos 60^\circ - s}{s^2 \sin 60^\circ} + \frac{s \cos 60^\circ - s}{s^2 \sin 60^\circ} \right) \cdot \varphi'' = -\frac{\varphi''}{s \cdot 0,8660} = -a \end{aligned} \quad (8)$$

Dosazením za φ'' a vyjádřením s v km dostaneme:

$$a = -b = \frac{238}{s \text{ (km)}} \quad (9)$$

Dosazením a a b do rovnic (5) a (6) a jejich řešením dostaneme:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{U}{n \cdot a^2} ; \\ v_i &= K a = -\frac{U}{n \cdot a} ; \quad w_i = K \cdot b = +\frac{U}{n \cdot a} \end{aligned} \quad (10)$$

kde n je počet stran v centrálním systému.

Prakticky postupujeme při přibližném vyrovnaní sítě s jedním centrálním systémem takto:

a/ Vypočteme úchylku odchylkové rovnice pro centrální systém podle vzorce (1a). Potřebné úhly γ_i' přitom počítáme podle vzorce (2).

b/ Vypočteme koeficienty přetvořených podmínkových rovnic a podle vzorce (9) a opravy v a w podle vzorce (10). Délku s vypočteme jako aritmetický průměr všech délek v km.

c/ Připojíme opravy v ke všem obvodovým délkám a w ke všem radiálním délkám /jsou stejné, jen opačného znaménka/.

d/ Výpočet oprav zkontrolujeme ze vzorce

$$[v] + [w] = -\frac{U}{a} \quad (11)$$

2. Vyrovnání sítě s několika centrálními body

Jestliže síť obsahuje několik centrálních systémů, vyrovnáme je postupnou aproximací tak, aby ve všech centrálních systémech byla splněna podmínka (11). Postupujeme přitom takto:

a/ pro každý centrální systém nezávisle vypočteme uzávěr, koeficienty a a b a opravy v_j a w_j jako v předchozím případě. Oprava pro délku, která je obsažena ve dvou nebo více centrálních systémech, je rovna součtu oprav /podle znamének/, které jí přísluší nezávisle v každém systému;

b/ pro každý centrální systém vypočteme kontrolní rovnici (11). Rovnice nebude splněna, poněvadž jsme nerespektovali závislost délek, které jsou současně v několika centrálních systémech. Předpokládejme, že chyba Δv_j všech oprav $v_{j,i}$ a $w_{j,i}$ v j -tém centrálním systému je stejná. Pak platí:

$$[v_j + \Delta v_j] - [w_j - \Delta v_j] = -\frac{U_j}{a_j} \quad (12)$$

a

$$\Delta v_j = \frac{-\frac{U_j}{a_j} - [v] + [w]}{n_j}, \quad (13)$$

kde n_j je počet délek v příslušném centrálním systému,

$[v]$ je součet oprav obvodových délek a

$[w]$ je součet oprav radiálních délek příslušného centrálního systému.

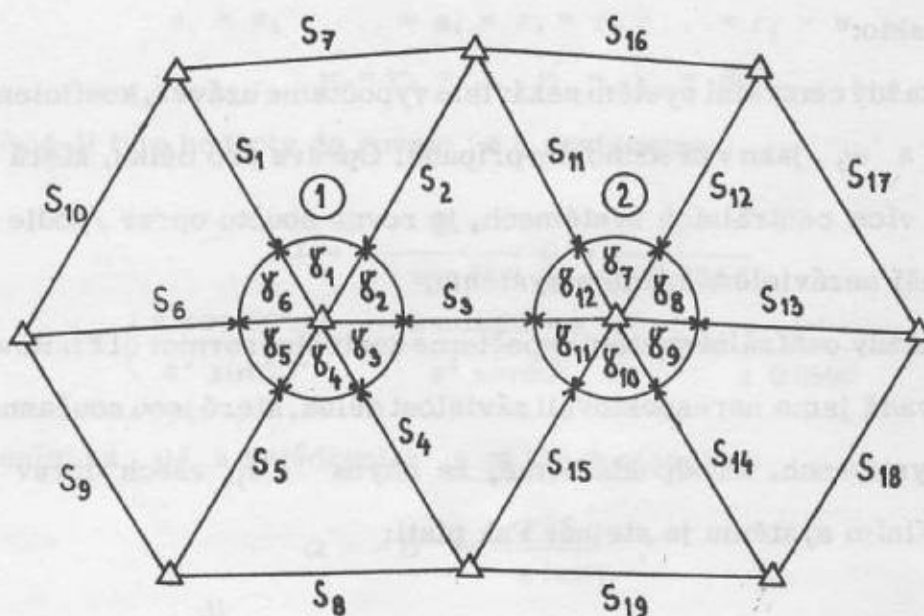
Vypočtenou opravu Δv_j pak podle znaménka přičteme ke všem opravám obvodových délek a odečteme od všech oprav radiálních délek. Výpočet korekcí oprav podle vzorce (13) pak opakujeme v každém centrálním systému a korekce Δv_j postupně přičítáme.

c/ Opravy vypočtené podle bodu b/ považujeme za opravy z první aproximace a zkontrolujeme je dosazením do rovnice (11). Nevyhovují-li opravy rovnici (11)

s dostatečnou přesností, opakujeme výpočet korekcí oprav podle bodu b/ tak dlouho, až jsou rovnice (11) splněny s dostatečnou přesností. V praxi zpravidla vystačíme se dvěma, maximálně třemi aproximacemi.

3. Příklad na přibližné vyrovnání sítě se dvěma centrálními systémy

V trilaterační síti dle obr. 2, jejíž vyrovnání podle MNČ je uvedeno v práci [1] byly měřeny délky s_1 až s_{19} a redukovány do zobrazovací roviny. Všechny délky mají stejnou váhu.



Obr. 2

Síť je charakterizována těmito údaji:

- průměrná délka stran = 21,3 km;
- maximální délka 25,3 km;
- minimální délka 15,9 km;
- střední chyba měřených délek = $\pm 0,16$ m.

Sestavíme délky do tabulky I a vypočteme uzávěry podmínkových rovnic podle vzorců (1) a (2) pro oba centrální systémy v tabulce II. V tabulce I vyhradíme místo pro výpočet oprav z několika aproximací.

s	Měřená délka	Opravy v mm aproximace			Přesné opravy podle MNČ
		I	II	III	
1	21 171,29	- 16	- 24	- 25	- 20
2	17 275,63	+ 18	+ 14	+ 15	+ 19
3	25 304,55	- 50	- 62	- 65	- 60
4	19 893,02	+ 18	+ 14	+ 15	+ 15
5	15 954,80	- 16	- 24	- 25	- 11
6	23 907,20	- 16	- 24	- 25	- 25
7	21 196,76	+ 16	+ 24	+ 23	+ 20
8	18 482,25	+ 16	+ 24	+ 23	+ 21
9	21 140,15	+ 16	+ 24	+ 23	+ 20
10	23 101,58	+ 16	+ 24	+ 23	+ 16
11	21 717,75	- 18	- 14	- 15	- 9
12	20 276,64	- 34	- 38	- 40	- 40
13	19 874,43	- 34	- 38	- 40	- 38
14	22 316,98	- 34	- 38	- 40	- 45
15	21 038,46	- 18	- 14	- 15	- 12
16	22 611,27	+ 34	+ 38	+ 36	+ 37
17	22 644,60	+ 34	+ 38	+ 36	+ 40
18	22 051,45	+ 34	+ 38	+ 36	+ 37
19	25 328,52	+ 34	+ 38	+ 36	+ 37
	Δv_1	+ 8	+ 1	+ 0	
	Δv_2	+ 4	+ 2	+ 0	

Tab. I

γ'	$\cos \gamma'$	r'	γ'	$\cos \gamma'$	r'
1	0,40652141	66 00'48,60	7	0,42109155	65 05'47,32
2	0,53426146	57 42 22,18	8	0,36300750	68 42 53,96
3	0,58944642	53 52 56,16	9	0,45855688	62 42 21,48
4	0,48630257	60 54 07,75	10	0,31855270	71 25 28,49
5	0,49707593	60 11 35,76	11	0,64542179	49 48 09,69
6	0,48019196	61 18 07,42	12	0,74017091	42 15 14,48
	U_1	- 2,13		U_2	- 4,58

Tab. II

Vypočteme podle vzorců (9):

$$a = \frac{238}{s \text{ (km)}} = 11,2 \quad b = -a = -11,2$$

opravy pro 1. centrální systém podle vzorce (10):

$$v_1 = - \frac{U_1}{n \cdot a} = + 0,016 \text{ m} \quad w_1 = - 0,016 \text{ m}$$

a pro 2. centrální systém:

$$v_2 = - \frac{U_2}{n \cdot a} = + 0,034 \text{ m} \quad w_2 = - 0,034 \text{ m}$$

Vypočtené opravy doplníme do tabulky I, první aproximace. Opravy pro tutéž délku ve dvou centrálních systémech slučujeme, například:

- délka s_{10} je obvodová v centrálním systému 1. Obdrží jen opravu $v_1 = 0,016 \text{ m}$;
- délka s_{12} je radiální v centrálním systému 2. Obdrží jen opravu $w_2 = - 0,034 \text{ m}$;
- délka s_2 je radiální v centrálním systému 1. a obvodová v centrálním systému 2.

Obdrží součet oprav $w_1 + v_2 = +0,018 \text{ m}$;

- délka s_3 je radiální v systému 1. i 2., obdrží součet oprav $w_1 + w_2 = - 0,050 \text{ m}$.

V dalším vypočteme korekce Δv_1 a Δv_2 pro každý centrální systém podle vzorce (13) a doplníme je do tabulky I. Přitom dbáme na to, abychom při výpočtu $[v]$ sčítali jen opravy obvodových délek a při výpočtu $[w]$ jen opravy radiálních délek příslušného systému. Pracujeme přitom podle náčrtu sítě.

Vypočtené korekce Δv_j přičteme k opravám obvodových délek a odečteme od oprav radiálních délek příslušného systému. Je-li délka současně ve dvou centrálních systémech, obdrží oprava součet příslušných korekcí obdobně jako při výpočtu oprav.

Výpočet korekcí oprav Δv_j opakujeme v 2. a 3. aproximaci, kdy jsou korekce dostatečně malé. V uvedeném příkladě bylo možné ukončit výpočet již v 2. aproximaci, kdy maximální korekce Δv_2 byla 2 mm.

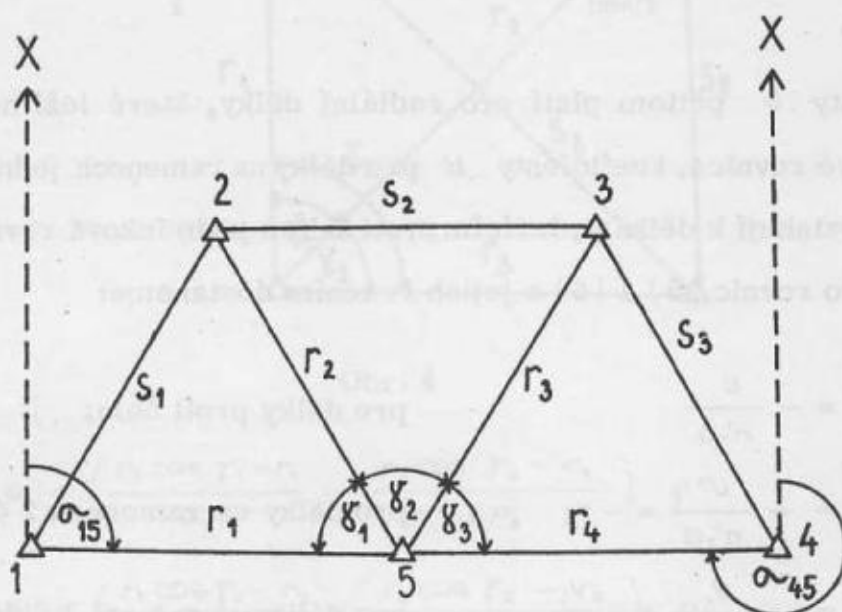
Připojením oprav z poslední aproximace k měřeným délkám je výpočet vyrovnávacích délek skončen.

Pro srovnání jsou v tabulce I uvedeny opravy vypočtené vyrovnáním podle MNČ /viz [1]/. Maximální rozdíl opravy vypočtené navrženou přibližnou metodou je 1,4 cm, což při střední chybě měřených délek $m = 16 \text{ cm}$ je zcela zanedbatelné.

4. Připojení azimutální podmínky při vyrovnání délkových sítí

Podmínková rovnice pro dva pevné azimuty /směrníky/ v délkové síti má obdobný tvar jako podmínka pro centrální systém. V síti podle obr. 3 jsou měřeny délky r_1

až r_4 , s_1 až s_3 a jsou dány pevné směrníky σ_{15} a σ_{45} /například určené astronomicky nebo pomocí gyroteodolitu/.



Obr. 3

Podmínková rovnice má tedy tvar:

$$r_1 + r_2 + r_3 + (\sigma_{15} - \sigma_{45}) = 0$$

nebo po dosazení:

$$\arccos \frac{r_1^2 + r_2^2 - s_1^2}{2r_1r_2} + \arccos \frac{r_2^2 + r_3^2 - s_2^2}{2r_2r_3} + \arccos \frac{r_3^2 + r_4^2 - s_3^2}{2r_3r_4} + (\sigma_{15} - \sigma_{45}) = 0 \quad (14)$$

Linearizací dostaneme přetvořené podmínkové rovnice ve tvaru:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + b_1w_1 + b_2w_2 + b_3w_3 + b_4w_4 + U = 0 \quad (15)$$

kde U je úchylka po dosazení měřených veličin do podmínkové rovnice (14). Koeficienty a_i pro délky s_i jsou stejné jako ve vzorci (4). Koeficienty b_i pro délky r_i jsou stejné jako ve vzorci (4) jen tehdy, jde-li o délku, která se zúčastní výpočtu dvou úhlů podmínkové rovnice (14), tj. pro délky r_2 a r_3 . Koeficient b_i pro délky, které se zúčastní výpočtu jen jednoho úhlu, nemá tu část vzorce (4), která obsahuje úhel nepoužitý ve vzorci (14). Například:

$$b_1 = \frac{r_2 \cos \gamma_1 - r_1}{2P_1} \rho'' \quad b_4 = \frac{r_3 \cos \gamma_3 - r_4}{2P_3} \rho'' \quad (16)$$

Pro přibližné vyrovnaní dosadíme opět do rovnic (4) a (16) vztahy (7) a dostaneme:

$$a = \frac{238}{s(\text{km})} \quad b = -a \quad b' = -\frac{a}{2} \quad (17)$$

Koeficienty b přitom platí pro radiální délky, které leží na ramenech dvou úhlů podmínkové rovnice, koeficienty b' pro délky na ramenech jednoho úhlu. Koeficienty a se vztahují k délkám, ležícím proti úhlům podmínkové rovnice. Dosazením těchto hodnot do rovnic (5) a (6) a jejich řešením dostaneme:

$$\begin{aligned} v_i &= -\frac{U}{n' \cdot a} && \text{pro délky proti úhlu;} \\ w_i &= +\frac{U}{n' \cdot a} = -v_i && \text{pro délky na ramenech 2 úhlů;} \\ w'_i &= +\frac{U}{2n' \cdot a} = -\frac{v_i}{2} && \text{pro délky na rameni 1 úhlu.} \end{aligned} \quad (18)$$

n' v těchto vzorcích vypočteme jako:

$$n' = n - \frac{\rho}{2} \quad (19)$$

kde ρ je počet délek, které leží na rameni jen jednoho úhlu podmínkové rovnice. Pro výpočet oprav v a w platí rovněž kontrolní rovnice (11).

Obsahuje-li síť více různých podmínek, postupujeme stejně jako v předchozím případě, tj. vypočteme nezávisle z každé podmínkové rovnice opravy délek. Opravy pro každou délku algebraicky sečteme a z kontrolní rovnice (11) pro každou podmínkovou rovnici vypočteme korekce oprav podle vzorce (13). V podmínkové rovnici pro azimut musíme opět n nahradit n' /viz vzorec (19)/.

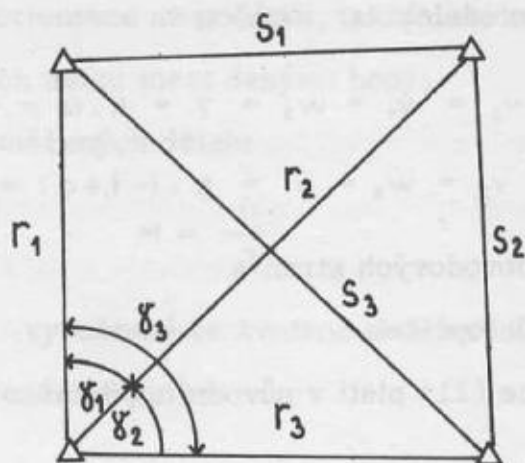
5. Připojení podmínky pro geodetický čtyřúhelník

Pro geodetický čtyřúhelník /viz obr. 4/ můžeme zapsat podmínku ve tvaru:

$$r_1 + r_2 - r_3 = 0 \quad (20)$$

Linearizací této podmínkové rovnice dostaneme přetvořenou podmínkovou rovnicí:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3 + U = 0 \quad (21)$$



Obr. 4

kde:

$$b_1 = \left(\frac{r_2 \cos \gamma_1 - r_1}{2P_1} - \frac{r_3 \cos \gamma_3 - r_1}{2P_3} \right) \varphi''$$

$$b_2 = \left(\frac{r_1 \cos \gamma_1 - r_2}{2P_1} + \frac{r_3 \cos \gamma_2 - r_2}{2P_2} \right) \varphi''$$

$$b_3 = \left(\frac{r_2 \cos \gamma_2 - r_3}{2P_2} - \frac{r_1 \cos \gamma_3 - r_3}{2P_3} \right) \varphi''$$

$$a_1 = \frac{s_1}{2P_1} \cdot \varphi'' \quad a_2 = \frac{s_2}{2P_2} \cdot \varphi'' \quad a_3 = -\frac{s_3}{2P_3} \cdot \varphi''$$

Pro přibližné vyrovnaní předpokládejme, že čtyřúhelník je čtverec. Pak platí:

$$\begin{aligned} r_1 = r_3 = s_1 = s_2 = s & & r_2 = s_3 = s \sqrt{2} \\ \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 45^\circ ; & & \cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \gamma_3 = 90^\circ ; & & \cos \gamma_3 = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$2P_1 = 2P_2 = 2P_3 = s^2$$

Dosazením těchto hodnot do rovnic (21) dostaneme:

$$a_1 = a_2 = b_1 = b_3 = a = \frac{206}{s \text{ (km)}} \quad (23)$$

$$a_3 = b_2 = -a \sqrt{2} = -1,4a$$

Dosazením těchto vztahů do rovnice (5) pro koreláty a jejím řešením dostaneme pro korelátu:

$$8a^2K + U = 0 ; \quad K = -\frac{U}{8a^2} \quad (24)$$

a z ní opravy měřených délek:

$$\begin{aligned}v_1 = v_2 = w_1 = w_3 = v = K \cdot a = -\frac{U}{8a} \\ v_3 = w_2 = v' = K \cdot (-1,4a) = -1,4v\end{aligned}\quad (25)$$

kde v jsou opravy obvodových stran a

v' jsou opravy úhlopříček.

Kontrolní rovnice (11) platí v původním tvaru:

$$[av] + [bw] = -U \quad (26)$$

Dosazením za a , b , v , w z rovnic (23) a (25) rovnici upravíme:

$$[v] - [v'] \cdot 1,4 = -\frac{U}{a} \quad (27)$$

Prakticky postupujeme při vyrovnání geodetického čtyřúhelníka přibližnou metodou takto:

a/ vypočteme úchylku z podmínkové rovnice (20). Úhly γ přitom počítáme podle vzorce (2);

b/ vypočteme koeficient a podle vzorce (23) a opravy obvodových stran v a úhlopříček v' podle vzorců (25);

c/ výpočet oprav zkontrolujeme podle vzorce (27).

Jestliže některé strany obdržely opravy z dalších podmínek v síti, vypočteme odchylku kontrolní rovnice (27) a z ní korekce Δv jako v předchozích případech. Konečné opravy počítáme opět aproximací. Odchylku v tomto případě nerozdělujeme rovnoměrně, ale úhlopříčkám prisoudíme korekci 1,4x větší než obvodovým.

6. Připojení podmínky pro dlouhou spojnicí /diagonálu/

Připojení podmínky pro dlouhou spojnicí /viz obr. 5/ je poměrně častý případ při vyrovnání délkově měřených sítí, například při vložení řetězce mezi 2 dané body.

Výpočet koeficientů přetvořených podmínkových rovnic je poměrně složitý /viz [2]/. Pro přibližné vyrovnání sítě je vhodný tento postup:

a/ vyrovnáme podle přibližných metod ostatní podmínky v síti podle předchozích kapitol;

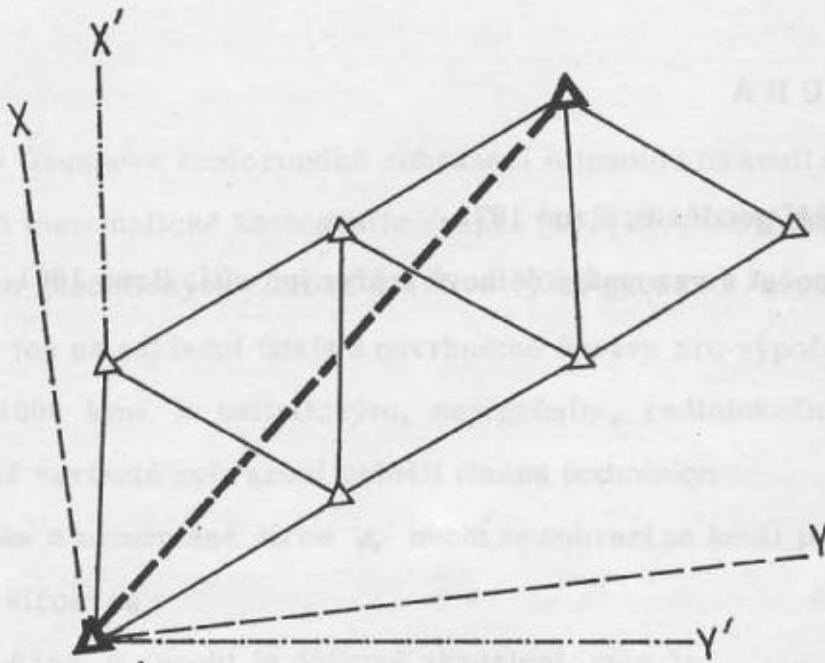
b/ z předběžně vyrovnaných délek vypočteme ve zvolené souřadnicové soustavě

X', Y' /pokud je známa orientace na počátku, tak v dané souřadnicové soustavě/
souřadnice všech bodů a z nich délku mezi danými body;

c/ vypočteme měřítko měřených délek:

$$M = \frac{D}{D'}$$

kde D je daná délka a D' vypočtená ve zvolené soustavě. Vypočteným měřítkem pak vynásobíme všechny měřené délky.



Obr. 5

Místo výpočtu oprav měřených délek můžeme ze souřadnic daných bodů a vypočtených v místní soustavě vypočíst transformační klíč pro podobnostní transformaci a souřadnice transformovat z místní soustavy do dané. Výsledkem jsou pak přímo souřadnice určovaných bodů.

7. Z á v ě r

V článku jsou navrženy metody pro přibližné vyrovnání délkových sítí podle podmínek. Navržené postupy splňují exaktně podmínku metody nejmenších čtverců pro síť rovnostranných trojúhelníků /u geodetického čtyřúhelníka pro čtverec/. V praxi je navržený postup použitelný i tehdy, jestliže je tento předpoklad splněn jen přibližně. V uvedeném příkladu je poměr mezi nejkratší a nejdelší stranou 1:1,7, přesto vypočte-

né opravy se liší maximálně o 10% od oprav z vyrovnání podle metody nejmenších čtverců.

Metody přibližného vyrovnání jsou navrženy pro většinu podmínkových rovnic, vyskytujících se v délkově měřených sítích v prostoru s velmi malou hustotou geodetického podkladu nebo v sítích volných. V prostoru s vyšší hustotou geodetického podkladu, kde se zpravidla určují jednotlivé body, je vhodnější vyrovnání souřadnic z měření zprostředkujících.

L I T E R A T U R A

- [1] Vykuřtil, J.: Vyšší geodézie, Brno 1971.
- [2] Vykuřtil, J.: Výpočet a vyrovnání délkově měřených sítí, Brno 1961.

Došlo dne 11.7.1972

K řešení druhé hlavní geodetické úlohy na střední vzdálenosti užitím Gaussova konformního zobrazení elipsoidu na kouli

Teorie Gaussova konformního zobrazení elipsoidu na kouli se podrobně popisuje v učebnicích matematické kartografie /např. [1], [2]/. Užití tohoto zobrazení k řešení hlavních geodetických úloh se uvádí ve vyšší geodézii /např. [3], [4]/. Omezíme se proto jen na základní údaje a navrhneme úpravu pro výpočet středních vzdáleností /do 1000 km/ k balistickým, navigačním, radiolokačním a jiným účelům.

V druhé variantě zobrazení položil Gauss podmínky:

1. rovnoběžka o zeměpisné šířce φ_0 nechť se zobrazí na kouli jako rovnoběžka o zeměpisné šířce U_0 ;
2. na rovnoběžce U_0 nechť je délkové zkreslení $m_0 = 1$;
3. v zobrazovaném pásmu elipsoidu v okolí rovnoběžky φ_0 nechť je minimální zkreslení délek.

Z uvedených podmínek vyplývají základní rovnice a konstanty Gaussova druhého konformního zobrazení elipsoidu na kouli.

Zeměpisné souřadnice bodů na elipsoidu o parametrech a, e^2 označme φ, λ ; odpovídající souřadnice na Gaussově kouli o poloměru R_0 označme U, V . Pro zeměpisné délky na kouli platí

$$V = \alpha \lambda , \quad (1)$$

kde konstanta

$$\alpha = \sqrt{1 + e^2 \cos^2 \varphi_0} . \quad (2)$$

Zeměpisná šířka rovnoběžky U_0 se vypočte ze vzorce

$$\sin U_0 = \frac{1}{\alpha} \sin \varphi_0 . \quad (3)$$

$$R_0 = \sqrt{M_0 N_0} ; \quad (4)$$

je to střední poloměr křivosti elipsoidu pro $\varphi = \varphi_0$.

Z rovnic (1) až (4) je zřejmé, že Gaussovo konformní zobrazení určitého elipsoidu na kouli je jednoznačně definováno volbou rovnoběžky φ_0 .

K zeměpisným šířkám φ se šířky U v praxi počítají zpravidla ze vzorce

$$U = U_0 + \Delta U , \quad (5)$$

ve kterém je ΔU vyjádřeno řadou

$$\Delta U = \frac{1}{V_0} \Delta \varphi + \frac{3}{2} \frac{\eta_0^2 \operatorname{tg} \varphi_0}{\varrho V_0^3} \Delta \varphi^2 + \frac{1}{2} \frac{\eta_0^2}{\varrho^2 V_0^5} (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_0 + \eta_0^2 + 4 \eta_0^2 \operatorname{tg} \varphi_0) \Delta \varphi^3 + \dots \quad (6)$$

kde $V_0 = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi_0}$; $\eta_0^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_0$; $\Delta \varphi = \varphi - \varphi_0$.

Vzorec pro výpočet hodnot U se upravuje také takto:

$$\varphi - U = \varphi_0 - U_0 + \left(1 - \frac{1}{V_0}\right) \Delta \varphi - \frac{3}{2} \frac{\eta_0^2 \operatorname{tg} \varphi_0}{\varrho V_0^3} \Delta \varphi^2 - \dots \quad (7)$$

Výpočet se usnadní tabulkami. Tabulky hodnot U k argumentu φ pro zobrazení Besseleova elipsoidu s rovnoběžkou $\varphi_0 = 49^\circ 30'$ sestavil Ing. Josef Křovák při svém zobrazení ČSSR /"Zobrazovací tabulky, díl 1."/ V [1] jsou tabulky hodnot $\varphi - U$ k argumentu φ pro zobrazení celého Krasovského elipsoidu na Gaussovu kouli /je to tzv. první Gaussovo zobrazení, při kterém je $\varphi_0 = 0$; $\alpha = 1$; $R_0 = a = 6\,378\,245$ m/.

Zkreslení délek /měřítko zobrazení/ je dáno řadou

$$m = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta_0^2}{V_0} \operatorname{tg} \varphi_0 \frac{\Delta U^3}{\varrho^3} - \frac{1}{6} \frac{\eta_0^2}{V_0^2} [1 - e'^2 (6 - 7 \cos^2 \varphi_0)] \frac{\Delta U^4}{\varrho^4} - \dots \quad (8)$$

Pro rozdíl Δ , azimutu α , hlavní kružnice /ortodromy/ na kouli a azimutu α_1 geodetické čáry na elipsoidu platí v počátečním bodě P_1 :

$$\Delta_1 = \frac{\varrho''}{2} \Gamma_1 \sigma + \frac{\varrho''}{6} \Gamma_1' \sigma^2 + \frac{\varrho''}{24} \Gamma_1'' \sigma^3 + \dots \quad (9)$$

kde $\Gamma_1 = \frac{\sin \alpha_1}{\alpha R_0 \cos U_1} (\sin \varphi_1 - \alpha \sin U_1)$

je křivost obrazu geodetické čáry v bodě P_1 ; Γ_1' , Γ_1'' jsou její první a druhá derivace; σ je délka oblouku hlavní kružnice na kouli.

Při konformním zobrazení užšího pásu elipsoidu kolem rovnoběžky φ_0 jsou deformace délek velmi malé a také obrazy geodetických čar prakticky splývají s orto-

dromami na kouli. V Křovákové zobrazení ČSSR / $\varphi_0 = 49^\circ 30'$ / je naše území v rovnoběžkovém páse $\pm 1^\circ 46'$ od rovnoběžky φ_0 . Maximální zkreslení délek je $\pm 0,06$ mm/km a korekce azimutu geodetické čáry na azimut ortodromy je maximálně $\pm 0,0001''$ /km. Nejdelší trigonometrické strany /60 km/ se na elipsoidu a na kouli liší pouze o ± 4 mm a rozdíl azimutů je nejvýše $\pm 0,006''$. Trigonometrická síť na konformní kouli je tedy prakticky věrným obrazem sítě na elipsoidu /deformace vzniklé zobrazením na kouli jsou zanedbatelné/ - viz [1], str. 107. Zobrazení koule do roviny je samozřejmě podstatně jednodušší než přímé zobrazení elipsoidu. To jsou důvody, proč také jiní autoři nejprve zobrazují elipsoid konformně na kouli, zejména při kuželovém nebo válcovém zobrazení v obecné poloze.

Je-li možno při konformním zobrazení elipsoidu na kouli zanedbat délkové a azimutové korekce pro strany trigonometrické sítě, je výhodné řešit tak hlavní geodetické úlohy na kouli. U delších geodetických čar je však třeba uvažovat korekce délek a azimutů. V odborné literatuře jsou uvedeny metody pro čáry až 1000 km dlouhé s přesností na milimetry a azimuty s přesností $\pm 0,01''$ - [1].

Při řešení druhé hlavní geodetické úlohy pro balistické, navigační, radiolokační a jiné účely postačí podstatně nižší přesnost, např. 10-20 m v délce a několik málo vteřin u azimutů i pro délky až 1000 km. Potom zobrazovaný pás elipsoidu může být značně širší než pro přesné geodetické výpočty.

Zvolme pro konformní zobrazení Krasovského elipsoidu na kouli $\varphi_0 = 50^\circ$. Podle vzorců (2), (3) a (4) dostaneme / $e'^2 = 0,00673853$ /:

$$\alpha = 1,00057502 ; \quad U_0 = 49^\circ 57' 38,79'' ; \quad R_0 = 6381930,3 \text{ m.}$$

Dosazením do vzorců (8) a (9) lze zjistit: Budeme-li počítat vzdálenosti a azimuty v pásu 10° na sever a na jih od zvolené rovnoběžky $\varphi_0 = 50^\circ$, tj. mezi 40. až 60. rovnoběžkou, bude maximální korekce délky 1000 km menší než 12 m a korekce azimutů menší než $5''$; v pásu od 45. do 55. rovnoběžky nedosáhne korekce pro 1000 km dlouhé čáry hodnoty 1,5 m a korekce azimutů bude menší než $1,3''$. Uvážíme-li přesnost určení souřadnic bodů v balistice, navigaci aj. a možnosti vytyčení směru z vypočteného azimutu, dojdeme k závěru, že korekce délky i azimutů bude zanedbatelná /pro uvedené účely plně postačí hodnoty vypočtené na Gaussově kouli/.

Dosadíme-li do vztahu (6) číselné hodnoty konstant φ_0, V_0, η_0 a zanedbáme-li malý člen třetího řádu, bude

$$\Delta U_i = + 9986,11 \frac{\Delta \varphi_i''}{10^4} + 2,40 \left(\frac{\Delta \varphi_i}{10^4} \right)^2. \quad (10)$$

Pro praktické výpočty hodnot U_i je ještě výhodnější použít vzorce (7) ve tvaru

$$U_i = \varphi_i - (\varphi_0 - U_0) - \left(1 - \frac{1}{V_0}\right) \Delta \varphi_i + \frac{3}{2} \frac{\eta_0^2 \operatorname{tg} \varphi_0}{\varrho V_0^3} \Delta \varphi_0^2 + \dots$$

Dosadíme-li do tohoto vzorce číselné hodnoty konstant, dostaneme:

$$U_i = \varphi_i - 2' 21'', 21 - 13'', 89 \frac{\Delta \varphi_i}{10^4} - 2,40 \left(\frac{\Delta \varphi_i}{10^4} \right)^2. \quad (11)$$

Zeměpisné délky V_i na kouli se počítají z délek λ_i na elipsoidu podle vzorce (1). Ve vzorcích pro řešení druhé hlavní geodetické úlohy na kouli však potřebujeme rozdíl délek ΔV , který vypočteme ze vzorce:

$$\Delta V = \alpha \Delta \lambda = (1 + \alpha - 1) \Delta \lambda = \Delta \lambda + (\alpha - 1) \Delta \lambda,$$

kde $\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. Po dosazení konstanty α bude:

$$\Delta V = \Delta \lambda + 0,0005 7502 \Delta \lambda'' . \quad (12)$$

Jsou-li tedy na elipsoidu dány dva body P_1 a P_2 svými zeměpisnými souřadnicemi φ_1, λ_1 a φ_2, λ_2 , vypočteme podle vzorce (11) zeměpisné šířky U_1, U_2 a podle vzorce (12) rozdíl zeměpisných délek ΔV na Gaussově kouli. Azimuty α_1 a α_2 a délku σ ortodromy na kouli vypočteme podle známých vzorců - [3]:

$$\operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} U_2 \cos U_1 - \sin U_1 \cos \Delta V}{\sin \Delta V} \quad (13)$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_1 \cos U_1}{\cos U_2} \quad (14)$$

$$\sin \frac{\sigma}{R_0} = \frac{\cos U_2 \sin \Delta V}{\sin \alpha_1} = \frac{\cos U_1 \sin \Delta V}{\sin \alpha_2} . \quad (15)$$

Kvadrant azimutu α_1 se určí podle následující tabulky - [5]:

Z n a m é n k o		K v a d r a n t
$\cotg \alpha_r$	ΔV	
+	+	1
+	-	3
-	+	2
-	-	4

Příklad:

Konstanty: $\varphi_0 = 50^\circ 00' 00''{,}00$; $\alpha - 1 = 0,0005\ 7502$;

$R_0 = 6\ 381\ 930,3\ \text{m}$; $\frac{R_0}{\varrho''} = 30,9404\ 7149$;

$\varphi_1 = 49^\circ 00' 40''{,}24$; $\lambda_1 = 21^\circ 18' 28''{,}73$

$\varphi_2 = 45^\circ 20' 10''{,}01$; $\lambda_2 = 15^\circ 30' 23''{,}41$

$$\Delta \lambda = -5^\circ 48' 05''{,}32 =$$

$$= -20\ 885''{,}32$$

$$\Delta \varphi_1 = -0^\circ 59' 19''{,}76 = -3559''{,}76 ; \quad \frac{\Delta \varphi_1}{10^4} = -0,355976$$

$$\Delta \varphi_2 = -4^\circ 39' 49''{,}99 = -16\ 789''{,}99 ; \quad \frac{\Delta \varphi_2}{10^4} = -1,678999$$

$$U_1 = 48^\circ 58' 24''{,}27 ; \quad U_2 = 45^\circ 18' 18''{,}89 ; \quad \Delta V = -5^\circ 48' 17''{,}33$$

$$\sin U_1 = 0,7544\ 0500 ; \quad \sin U_2 = 0,7108\ 6388 ; \quad \sin \Delta V = -0,1011\ 3989$$

$$\cos U_1 = 0,6564\ 0922 ; \quad \cos U_2 = 0,7033\ 2959 ; \quad \cos \Delta V = +0,9948\ 7221$$

$$\operatorname{tg} U_2 = 1,0107\ 1232$$

$$\cotg \alpha_r = +0,8611\ 4074 ;$$

$$\sin \alpha_2 = 0,7072\ 0634$$

$$\underline{\underline{\alpha_1 = 229^\circ 16' 00''{,}91}}$$

$$\underline{\underline{\alpha_2 = 45^\circ 00' 29''{,}05}}$$

$$\sin \alpha_1 = 0,7577\ 5771$$

$$\sin \frac{\sigma}{R_0} = 0,0938\ 7523$$

$$\varrho'' \frac{\sigma}{R_0} = 5^\circ 23' 11''{,}71 = 19\ 391''{,}71$$

$$\underline{\underline{\sigma = \frac{R_0}{\varrho''} \varrho'' \frac{\sigma}{R_0} = 599\ 988,65\ \text{m}}}$$

Tentýž příklad je řešen v [6] metodou Besselovou pro dlouhé křivky. Rozdíly /chyby našeho výpočtu/ jsou: 1,3 m v délce, 0''{,}23 v azimutu α_1 , a 0''{,}47 v azimutu α_2 .

Výpočet vzdálenosti a azimutů navrženým způsobem je rychlý a svou přesností plně vyhovuje pro balistické, navigační a jiné účely; je také vhodný pro kontrolu hodnot, vypočtených jinou metodou.

L I T E R A T U R A

- [1] Böhm, J.: Matematická kartografie, díl II., Brno 1951.
- [2] Fiala, F.: Matematická kartografie, Praha 1955.
- [3] Fiala, F.: Vyšší geodézie II., Praha 1952.
- [4] Krasovskij, F.N.: Rukovodstvo po vysšej geodezii, Moskva 1942.
- [5] Ganšin, V.N.: Geometrija zemnogo ellipsoida, Moskva 1967.
- [6] Zakatov, P.S.: Kurs vysšej geodezii, Moskva 1964.

Došlo dne 15. 5. 1973.

Zjednodušený výpočet azimutu Polárky v polních podmínkách

1. Úvod

Měření astronomických azimutů pozemních směrů triangulačním teodolitem se u nás v posledních více než deseti letech stalo zcela běžným a často používaným způsobem v geodetické praxi. Po dokončení měřických prací v Státní trigonometrické síti se těžiště astronomických měření směrů přesunulo hlavně do oblasti plnění některých základních úkolů geodetického zabezpečení. Zde však použití metody měření na Polárku často naráží na odpor některých geodetů, kteří vidí hlavní překážku v nutnosti poněkud pracnějšího výpočtu azimutu na kalkulačním stroji v polních podmínkách. A právě tato skutečnost mne přiměla k zamyšlení nad možností zjednodušení celého výpočetního postupu při použití vhodně zpracovaných tabulek azimutů Polárky.

2. Základní vztahy pro výpočet tabulek

Ze známé rovnice pro výpočet azimutu nebeského tělesa

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin t}{\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \operatorname{tg} \delta} \quad (1)$$

je zřejmé, že azimut A je funkcí tří proměnných:

- zeměpisné šířky stanoviště φ ,
- deklinace nebeského tělesa δ ,
- hodinového úhlu t , který známým způsobem snadno vypočteme z rektascence $\bar{\alpha}$, zeměpisné délky stanoviště λ , z okamžiku záměry na nebeské těleso a známé hodnoty Greenwichského hvězdného času.

Poněvadž deklinace Polárky /která je v našich zeměpisných šířkách nesporně nejvhodnější hvězdou pro měření azimutů/, se mění během několika let v poměrně nepatrných mezích několika málo minut, je účelné vypočíst předem a tabelovat azimuty Polárky pro vhodně zvolenou konstantní deklinaci δ_0 . Poněvadž rozdíl skutečné deklinace v době měření δ a zvolené konstantní deklinace pro výpočet tabulek δ_0 bude malý, bude možno rovnici (1) vyjádřit ve tvaru

$$A = A_0 + \left(\frac{\partial A}{\partial \delta} \right)_0 \Delta \delta \quad (2)$$

kde

$$A_0 = \operatorname{arctg} \frac{\sin t}{\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \operatorname{tg} \delta_0} \quad (2a)$$

a

$$\Delta \delta = \delta - \delta_0 \quad (2b)$$

Parciální derivaci $\frac{\partial A}{\partial \delta}$ snadno určíme z rovnice (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \delta} &= \cos^2 A \frac{\sin t \cos \varphi}{\cos^2 \delta (\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \operatorname{tg} \delta)^2} = \\ &= \cos^2 A \operatorname{tg}^2 A \frac{\cos \varphi}{\sin t \cos^2 \delta} = \frac{\sin^2 A \cos \varphi}{\sin t \cos^2 \delta} \end{aligned}$$

Koeficient u $\Delta \delta$ ve druhém členu rovnice (2) bude tedy roven

$$D_0 = \left(\frac{\partial A}{\partial \delta} \right)_0 = \frac{\sin^2 A_0 \cos \varphi}{\sin t \cos^2 \delta_0} \quad (3)$$

a stejně tak jako číselné hodnoty A_0 jej bude možno tabelovat jako funkci dvou proměnných φ a t .

Poněvadž pro $t = 0$ a $t = \pi / 12^h$ je z rovnice (2a) $A_0 = 0$, bude třeba v těchto bodech použít limitu funkce (3), pro kterou zřejmě platí

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ A_0 \rightarrow 0}} \frac{\sin^2 A_0 \cos \varphi}{\sin t \cos^2 \delta_0} = \lim_{\substack{t \rightarrow \pi \\ A_0 \rightarrow 0}} \frac{\sin^2 A_0 \cos \varphi}{\sin t \cos^2 \delta_0} = 0$$

Za předpokladu, že tabulkový krok u obou proměnných φ i t zvolíme tak, aby pro požadovanou přesnost stačila lineární interpolace, bude možno dosud běžný výpočet azimutu Polárky z rovnice (1) nahradit lineární plošnou interpolací v tabulkách hodnot A_0 , D_0 a výpočtem druhého členu rovnice (2), který však představuje pouze jeden součin dvou maximálně tříciferných hodnot.

3. Definice tabelovaných hodnot a návod k praktickému použití tabulek

Pro požadovanou přesnost výpočtu azimutu Polárky do $\pm 2''$ se jako plně postačující ukázal tabulkový krok 1° v zeměpisné šířce a 10^m y hodinovém úhlu. Příložené tabulky, vypočítané na počítači ZPA 600, jsou sestaveny pro severní zeměpisné šířky od 42° do 58° a pro deklinaci Polárky $\delta_0 = 89^\circ 09' 00''$. Tabulky budou použitelné nejméně do roku 1980.

Prvních dvanáct stran tabulek je vyhrazeno číselným hodnotám α_0 a d_0 pro šedesátinnou úhlovou míru. Symbolem α_0 jsou označeny absolutní hodnoty menšího úhlu, sevřeného vertikálem Polárky a meridiánem, vypočtené pro deklinaci δ_0 . Symbol d_0 pak má význam absolutní hodnoty definované proměnné D_0 , tedy

$$d_0 = |D_0| \quad (4)$$

Pro jednoznačné rozlišení jsou číselné hodnoty d_0 v tabulkách označeny hvězdičkou.

Pro zjednodušení plošné lineární interpolace jsou tabulky na posledních osmi stranách doplněny interpolačními koeficienty K_φ a K_t , tj. hodnotami zbytku argumentů v jednotkách tabulkového kroku.

S ohledem na tabelaci nezáporných hodnot α_0 a d_0 / místo A_0 a D_0 / se ukazuje účelným zavedení veličiny $\Delta\delta_0$, definované vztahem

$$\Delta\delta_0 = -\Delta\delta = \delta_0 - \delta, \quad (5)$$

což značně zjednoduší veškeré úvahy o kvadrantech a výsledném znaménku druhého členu v rovnici (2).

Azimut Polárky pak bude možno pomocí tabulek vypočítat takto:

a/ Pro argumenty φ a t určíme lineární plošnou interpolací hodnoty α_0 a d_0 /pro deklinaci δ_0 /

b/ Vypočteme úhel α /pro skutečnou deklinaci δ /v době měření pomocí vztahu

$$\alpha = \alpha_0 + d_0 \Delta\delta_0 \quad (6)$$

c/ Z úhlu α vypočteme azimut Polárky A podle vztahů

$$A = 2\pi - \alpha \quad \text{pro } t \in (0^h, 12^h)$$

$$A = \alpha \quad \text{pro } t \in \langle 12^h, 24^h \rangle$$

Použití tabulek pro praktický výpočet si ukážeme na příkladech 1 a 2.

Příklad 1 :

Na stanovišti P_1 o zeměpisné šířce $\varphi_1 = 49^\circ 36' 21'',2$ byl pro okamžik záměry na Polárku vypočten hodinový úhel $t_1 = 14^h 54^m 57^s,6$ a z efemerid určena deklinace $\delta_1 = 89^\circ 09' 07'',15$.

Pro zbytek argumentů $z_\varphi = 36' 21'',2$ a $z_t = 4^m 57^s,6$ nalezneme v tabulkách hodnoty $\kappa_\varphi = 0,606$ a $\kappa_t = 0,496$. Plošnou lineární interpolací vypočteme /pomocí diferencí a koeficientů κ_φ a κ_t / hodnoty α_0 a d_0 takto:

	14 ^h 50 ^m		15 ^h 00 ^m	
				$\Delta\delta_0 = - 7'',15$
49°	0 51 52		0 54 19	$\alpha_0 = 0^\circ 53' 44''$
	1,004		1,052	$d_0 \Delta\delta_0 = - 7''$
	0 52 30	0 53 44	0 54 59	$\alpha = 0^\circ 53' 37''$
	1,016	1,040	1,065	$A_1 = 0^\circ 53' 37''$
50°	0 52 55		0 55 25	
	1,024		1,073	

Klasickým výpočtem podle vzorce (1) $A_1 = 0^\circ 53' 36'',59$

Příklad 2 :

$$\varphi_2 = 48^\circ 27' 17'',7 ; \quad t_2 = 3^h 27^m 04^s,4 ; \quad \delta_2 = 89^\circ 09' 44'',52$$

$$\kappa_\varphi = 0,455 \quad \kappa_t = 0,707 \quad \Delta\delta_0 = - 44'',52$$

	3 ^h 20 ^m		3 ^h 30 ^m	
				$\alpha_0 = 1^\circ 01' 02''$
48°	0 59 01		1 01 05	$d_0 \Delta\delta_0 = - 54''$
	1,169		1,210	$\alpha = 1^\circ 00' 08''$
	0 59 34	1 01 02	1 01 39	$A_2 = 358^\circ 59' 52''$
	1,180	1,210	1,222	
49°	1 00 13		1 02 19	
	1,194		1,235	

Klasickým výpočtem podle vzorce (1) $A_2 = 358^\circ 59' 51'',69$

4. Závěr

Hlavní předností výpočtu azimutu Polárky pomocí tabulek je zrychlení a zjednodušení celého výpočetního postupu. Další výhoda spočívá v tom, že azimut Polárky

bude schopen počítat zacvičený počtář nebo zapisovatel ihned po skončeném měření s použitím nejjednoduššího ručního kalkulačního stroje a pro požadavek přesnosti 5" až 10" postačí logaritmické pravítko. Tabulky goniometrických funkcí k výpočtu potřebné nejsou. Pro eventuální použití teodolitu se setinným dělením kruhu jsou u autora k dispozici stejným způsobem upravené tabulky, kde tabelované hodnoty $\bar{\alpha}_0$ a \bar{d}_0 umožní přímý výpočet azimutu Polárky v grádech.

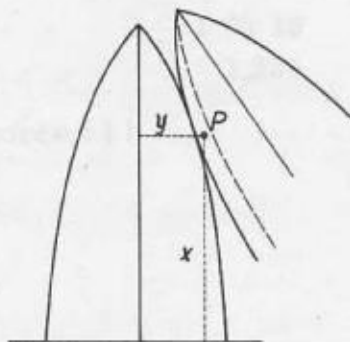
Došlo dne 30. 5. 1972

Obecné řešení transformace souřadnic mezi pásy Gaussova zobrazení

1. Ú v o d

Zobrazíme-li zemský povrch Gaussovým zobrazením v poledníkových pásích, pak každý pás tvoří zcela samostatnou souřadnou soustavu, v podstatě nezávislou na sousedních pásích. Poloha každého bodu v příslušném pásu je určena pravoúhlými souřadnicemi x, y , tj. vzdálenostmi od souřadných os. Osa Y je tvořena průmětem rovníku a osa X je posunuta rovnoběžně se směrem dotykového poledníku o 500-km doleva. Touto volbou souřadných os je pro pásy o šířce až 8° zaručeno, že souřadnice y_p libovolného bodu P uvnitř pásu je vždy kladná. Znaménko souřadnice x je závislé na tom, zda daný bod leží na severní či jižní polokouli.

Problémy však vznikají při souřadnicových výpočtech v okrajových územích pásů. Mnohdy se totiž stává, že k řešení početních úloh je nutno využít body, které podle své zeměpisné délky λ leží ve vzájemně různých pásích a jejichž pravoúhlé souřadnice x, y jsou vyjádřeny v důsledku toho v různých souřadných soustavách. V praxi je tato obtíž řešena tak, že souřadnice bodů z okrajových částí pásů jsou v seznamech uváděny jak pro levý, tak pro pravý pás. Souřadná soustava každého pásu musí být tedy rozšířena ještě do okrajové části sousedního pásu /obr.1/.



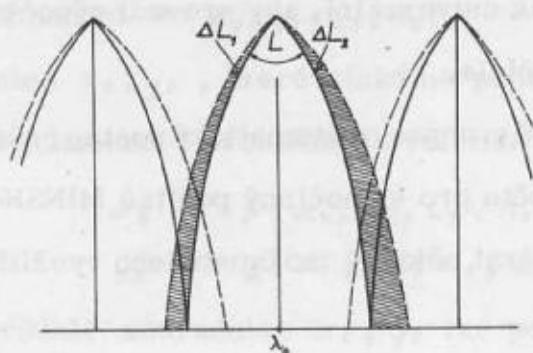
Obr. 1

Na okrajích každého pásu hovoříme o tzv. překrytovém území /na obr. 2 vy-

šrafováno/, jehož hloubka $\Delta L_1, \Delta L_2$ je předem stanovena. Počítáme-li souřadnice bodů v překrytovém území, je nutno pracovat tedy v poledníkovém pásu širším než je stanoveno zobrazovacím předpisem, obecně v pásu o šířce \bar{L} . Je-li $\Delta L_2 > \Delta L_1$, pak

$$\Delta L_2 = \Delta L$$

$$\bar{L} = L + 2 \Delta L_2 = L + 2 \Delta L. \quad (1)$$



Obr. 2

Šířka poledníkového pásu L i hloubka překrytového území ΔL je obecně libovolně volitelná. Je nutno však mít na zřeteli, že se zvětšováním celkové uvažované šířky \bar{L} narůstá i souřadnice y u bodů značně vzdálených od středního poledníkového pásu a zároveň i neúměrně délkové zkreslení. Tím se ztrácejí právě ty výhody, pro než bylo Gaussovo zobrazení vytvořeno a pak je lépe pracovat přímo v zeměpisných souřadnicích. Kromě toho z hlediska provedení výpočtu roste v závislosti na y i absolutní velikost členů určujících rovnic, čímž se ztrácí přesnost a komplikuje se transformace. K udržení požadované přesnosti je pak nutno do výpočetního postupu zahrnout další členy, což znamená časově náročnější výpočet. Z těchto důvodů není užitečné zvětšovat příliš celkovou šířku \bar{L} pásu.

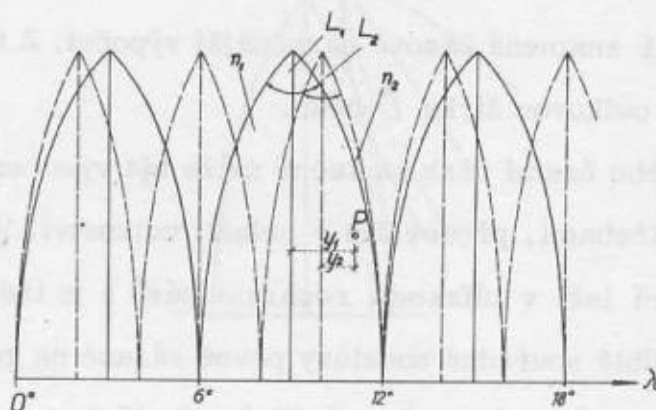
Zvětšení překrytového území však skutečně může být vynuceno některými speciálními praktickými potřebami, především v oblasti vojenství. Většinou jde o případy, kdy zájmové území leží v blízkosti rozhraní pásů a je třeba použít jednotné a značně rozsáhlé pravoúhlé souřadné soustavy pevně vázané na geodetický podklad. Důvodem tohoto požadavku může být např. zvětšování dostřelu a mobilnost dělostřelectva a takt. raket, řízení boje metodami operačního výzkumu, zobrazení modelu

terénu v paměti samočinného počítače digitalizací map malých měřítek atd. Získání takovéto rozsáhlé pravoúhlé souřadné soustavy lze dosáhnout pro okrajová území buď zmíněným zvětšením velikosti překrytového území ΔL používaného pásu, nebo ještě lépe vytvořením samostatné /místní/ pravoúhlé soustavy v samostatném Gaussově poledníkovém pásu, jehož volba je zcela nezávislá na dosavadním systému pásů, avšak je pevně vázána na bodový geodetický podklad. S použitím samočinného počítače jsou tyto transformační úlohy poměrně lehce i rychle řešitelné. Program výpočtu však musí být natolik univerzální, aby provedl výpočet pro obecně libovolné šířky pásů i libovolná jejich čísla.

Cílem článku je především popsat matematický postup řešení problému a v hlavních rysech i program výpočtu pro samočinný počítač MINSK-22. Kromě toho ještě na praktických příkladech ukázat některé možnosti jeho využití.

2. Volba šířky a čísla pásu

Uvažujeme 2 systémy poledníkových pásů, které jsou postupně vytvářeny a číslovány od základního Greenwichského poledníku směrem na východ /s výjimkou pásů o šířce 3° , které jsou definovány a číslovány jinak/. První systém tvoří stávající poledníkové pásy o šířce L_1 , v jejichž souřadných soustavách jsou dány pravoúhlé souřadnice bodů $P_i (x_i, y_i)$. Druhý systém je tvořen podobně pásy o šířce L_2 . Šířky L_1, L_2 pásů mohou být dány skutečně obecně, tedy jako libovolná kladná celá nebo racionální čísla ve stupních. Tak např. lze uvažovat šířku pásu $L_2 = 3,7829^\circ$ atd.



Obr. 3

Na obr. 3 jsou současně nakresleny 2 systémy pásů o šířkách $L_1 = 6^\circ$, $L_2 = 4^\circ$ v závislosti na zeměpisné délce λ .

Uvažujme ještě bod P , jehož souřadnice v soustavě daného pásu jsou x_1, y_1 /souřadnice y je vždy vztažena ke střednímu poledníku pásu, tj. zmenšena o 500 km/. Kromě souřadnic x_1, y_1 definují polohu bodu ještě 2 další veličiny, a to šířka pásu L_1 a jeho číslo n_1 . Bod P je tedy jednoznačně určen čtveřicí hodnot $P(x_1, y_1, L_1, n_1)$.

Tentýž bod P lze vyjádřit i v druhém systému poledníkových pásů, kde je definován podobně čtveřicí hodnot $P(x_2, y_2, L_2, n_2)$.

Hledané souřadnice x_2, y_2 , které získáme provedením transformačního výpočtu, jsou tedy obecně funkcemi 6 proměnných veličin:

$$\begin{aligned} x_2 &= f(x_1, y_1, L_1, n_1, L_2, n_2) \\ y_2 &= g(x_1, y_1, n_1, L_2, n_2) \end{aligned} \quad (2)$$

Protože původní pravoúhlé souřadnice x_1, y_1 lze početně převést na zeměpisné φ_P, λ_P s využitím hodnot L_1, n_1 , je možno vyjádřit funkční závislost také takto:

$$\begin{aligned} x_2 &= f(\varphi_P, \lambda_P, L_2, n_2) \\ y_2 &= g(\varphi_P, \lambda_P, L_2, n_2) \end{aligned} \quad (3)$$

Má-li být postup výpočtu i činnost programu pro počítač opravdu univerzální, pak musí umožňovat získání výsledku pro libovolnou volbu nezávisle proměnných $x_1, y_1, L_1, n_1, L_2, n_2$ v případech, kdy funkce f, g jsou definovány. Seřadme ještě jednotlivé proměnné z hlediska jejich zadání:

- n_1, L_1 - charakteristiky souřadného systému pásu, v němž jsou uvedeny souřadnice x_1, y_1 souboru bodů P_1 . Přestože jde o veličiny obecně proměnné, mají pro daný vstupní soubor charakter konstant.
- x_1, y_1 - dané pravoúhlé souřadnice bodů, které tvoří soubor vstupních dat, registrovaných do vhodného media.
- L_2 - šířka poledníkového pásu, do něhož provádíme transformaci. Z hlediska vedení výpočtu má význam jen pro určení délky středního poledníku pásu λ_0 , respektive určení čísla pásu n_2 , není-li toto předem zadáno.
- n_2 - číslo transformovaného pásu, které před zahájením výpočtu může nebo nemusí mít charakter konstanty. Zadáme-li jednoznačně předem n_2 , pak bude provedena transformace vzhledem ke střednímu poledníku pásu n_2 bez ohledu na to, zda daný bod P do pásu patří či nikoliv /vzhle-

dem ke své zeměpisné délce, kterou předem neznáme/. V opačném případě se provede přidělení čísla pásu n_2 až po výpočtu délky λ_p počítačem. Např. body 3. pásu 6° mohou být podle λ_p zařazeny do 3^o pásů čís. 4, 5 nebo 6.

Pro vhodnou a účelnou činnost programu musí být tedy vždy zvoleny 4 základní charakteristiky, které se počítači zadají v pořadí L_1, n_1, L_2, n_2 . Má-li však být provedeno přidělení čísla pásu n_2 až na základě vypočtené délky λ_p , pak v zadání uvedeme namísto n_2 indikaci ? /otazník/. Hodnoty L_1, L_2 mohou být i racionální, avšak n_1, n_2 vždy celočíselné.

Volbu šířky a čísla pásu uvedeme na praktických příkladech:

Příklad 1.:

Provést transformaci bodů z 5. pásu 6° do soustavy 4. pásu 6° . Zadání základních charakteristik provedeme takto:

6 5 6 4

Příklad 2.:

Provést transformaci bodů z 5. pásu 6° do příslušných pásů 3° . Zadání charakteristik:

6 5 3 ?

Příklad 3.:

Provést transformaci z 19. pásu 3° do příslušného pásu 6° .

3 19 6 ?

Příklad 4.:

V prostoru na rozhraní 3. a 4. pásu 6° chceme vytvořit pro ohraničený prostor A samostatnou souřadnou soustavu v Gaussově zobrazení tak, aby střední poledník nově vytvořeného pásu byl $\lambda_0 = 18^\circ$ - /obr. 4/.

Souřadnice bodů P_i jsou uváděny ve dvou různých soustavách, a to některé v soustavě 3. pásu, jiné v soustavě 4. pásu. Proto je nutno vytvořit dva samostatné soubory dat zvlášť pro 3. i 4. pás, jejichž charakteristiky zadáme např. takto:

a/ 1. soubor: 6 3 3 6

2. soubor: 6 4 3 6,

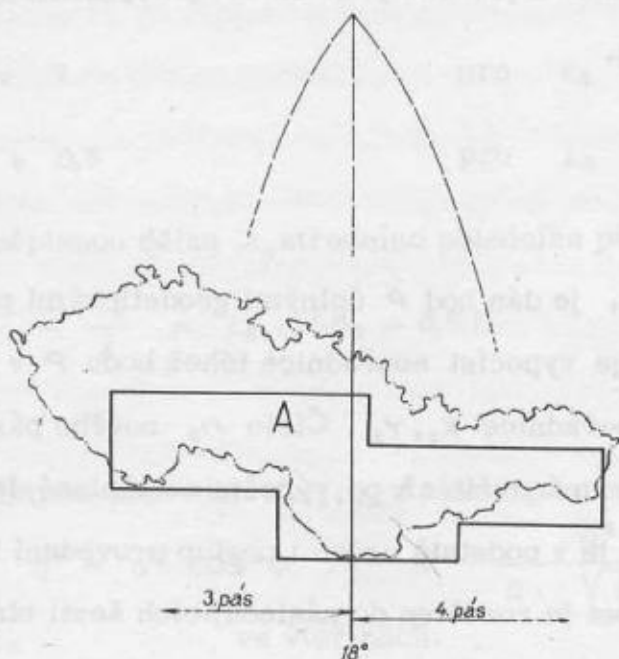
protože střední poledník 6. pásu 3° je právě $\lambda_0 = 18^\circ$.

b/ 1. soubor: 6 3 4 5

2. soubor: 6 4 4 5,

protože střední poledník 5. pásu 4° má také délku $\lambda_0 = 18^\circ$.

Velikost prostoru A není podstatná a zajímá nás jen z hlediska možného délkového zkreslení vzdálenějších bodů. Je lhostejné, zda celý prostor A se vejde či nikoli do zvoleného pásu např. 4° .



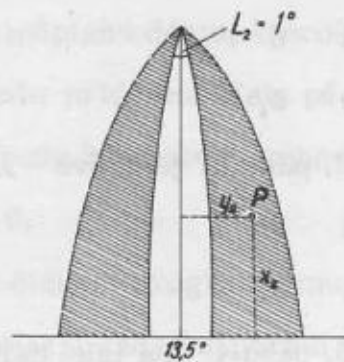
Obr. 4

Příklad 5.:

Soubor bodů P_i leží ve 4. pásu 6° . Chceme vytvořit samostatnou souřadnou soustavu v pásu n_2 , jehož střední poledník je určen délkou $\lambda_0 = 13^\circ 30'$. Charakteristiky transformace zadáme např. pro šířku pásu 1° takto:

6 4 1 14

protože právě ve 14. pásu 1° má střední poledník délku $\lambda_0 = 13,5^\circ$. Některé body budou ovšem ležet mimo 14. pás /protože fiktivní pás 1° je velmi úzký/ ve vnějším překrytovém území - obr. 5. Na výpočet souřadnic nemá tato skutečnost vliv, protože číslo pásu n_2 a tím i λ_0 jsme předem jednoznačně zadali.



Obr. 5

Z uvedených příkladů je vidět, že vhodnou volbou základních 4 charakteristik lze provést nejen transformaci z jednoho pásu do druhého, ale i vytvořit obecně libovolnou souřadnou soustavu.

3. Postup výpočtu

V pásu n_1 o šířce L_1 je dán bod P úplnými geodetickými pravoúhlými souřadnicemi x_1, y_1 . Úkolem je vypočítat souřadnice téhož bodu P v pásu n_2 o šířce L_2 , tj. úplné geodetické souřadnice x_2, y_2 . Číslo n_2 nového pásu je buď předem jednoznačně zadáno nebo se má určit až po výpočtu zeměpisné délky λ bodu P .

Funkčními vztahy (3) je v podstatě určen i postup provedení transformačního výpočtu, který pro přehlednost je rozdělen do následujících šesti etap:

- Určení délky λ'_0 daného pásu n_1 .
- Určení relativních souřadnic x_1, y_1 vzhledem ke střednímu poledníku pásu n_1 .
- Výpočet zeměpisných souřadnic φ, λ bodu P .
- Určení čísla pásu n_2 /je-li třeba/ a zeměpisné délky λ_0 v pásu n_2 .
- Výpočet relativních souřadnic x_2, y_2 v pásu n_2 .
- Výpočet úplných geodetických souřadnic x_2, y_2 .

a/ Určení zeměpisné délky středního poledníku pásu n_1 :

$$\begin{aligned} \lambda'_0 &= n_1 \cdot L_1 - \frac{L_1}{2} = L_1 \cdot (n_1 - 0,5) && \text{pro } L_1 \neq 3^\circ \\ \lambda'_0 &= n_1 \cdot L_1 = 3 \cdot n_1 && \text{pro } L_1 = 3^\circ \end{aligned} \quad (4)$$

b/ Určení relativních souřadnic x_1, y_1 :

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 && \text{v metrech} \\ y_1 &= Y_1 - n_1 \cdot 1\,000\,000 - 500\,000 \end{aligned} \quad (5)$$

c/ Pro výpočet zeměpisných souřadnic φ, λ bodu P využijeme metody pomocného bodu, která je pro počítač výhodná. Postup výpočtu je podrobně popsán v práci [4].

d/ Není-li číslo nového pásu n_2 předem zadáno, určíme n_2 ze zeměpisné délky λ bodu P takto:

$$n_2 = \text{celočíslná část } n'_2$$

$$n'_2 = \frac{\lambda}{L_2} + 1 \quad \text{pro } L_2 \neq 3^\circ \quad (6)$$

$$n'_2 = \frac{\lambda}{3} + 0,5 \quad \text{pro } L_2 = 3^\circ.$$

Určíme ještě zeměpisnou délku λ_0 středního poledníku pásu n_2 :

$$\lambda_0 = n_2 \cdot L_2 - \frac{L_2}{2} = L_2 \cdot (n_2 - 0,5) \quad \text{pro } L_2 \neq 3^\circ \quad (7)$$

$$\lambda_0 = 3 \cdot n_2 \quad \text{pro } L_2 = 3^\circ$$

e/ Vypočteme relativní souřadnice x_2, y_2 v pásu n_2 :

$$t = \operatorname{tg} \varphi, \quad \eta^2 = e'^2 \cdot \cos^2 \varphi, \quad N = \frac{a^2}{b \cdot \sqrt{1 + \eta^2}} \quad (8)$$

$$l = \lambda - \lambda_0 \quad \text{ve vteřinách.}$$

$$B = 111134,861084 \varphi^\circ - 16036,480269 \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi + 16,828067 \cdot$$

$$\sin 4 \varphi - 0,021975 \cdot \sin 6 \varphi + 0,000031 \cdot \sin 8 \varphi. \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= B + \frac{N \cdot \cos^2 \varphi \cdot t \cdot l^2}{2 q''^2} + \frac{N \cdot \cos^4 \varphi \cdot t \cdot l^4}{24 q''^4} (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4) + \\ &+ \frac{N \cdot \cos^6 \varphi \cdot t \cdot l^6}{720 q''^6} (61 - 58 t^2 + t^4 + 270 \eta^2 - 330 t^2 \eta^2) + \\ &+ \frac{N \cdot \cos^8 \varphi \cdot t \cdot l^8}{40\,320 q''^8} (1385 - 3111 t^2 + 543 t^4 - t^6) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{N \cdot \cos \varphi \cdot l}{q''} + \frac{N \cdot \cos^3 \varphi \cdot l^3}{6 q''^3} (1 + \eta^2 - t^2) + \frac{N \cdot \cos^5 \varphi \cdot l^5}{120 q''^5} \cdot \\ &\cdot (5 - 18 t^2 + t^4 + 14 \eta^2 - 58 t^2 \eta^2 + 13 \eta^4 - 64 t^2 \eta^4) + \\ &+ \frac{N \cdot \cos^7 \varphi \cdot l^7}{5\,040 q''^7} (61 - 479 t^2 + 179 t^4 - t^6). \end{aligned} \quad (11)$$

Výpočetní vzorce pro x_2, y_2 převzaty z [3] str. 19 a rozšířeny o další člen s využitím vztahů na str. 30, 31.

f/ Výpočet výsledných úplných souřadnic X_2, Y_2 :

$$\begin{aligned} X_2 &= x_2 \\ Y_2 &= y_2 + n_2 \cdot 1000000 + 500000. \end{aligned} \quad (12)$$

4. Omezení v souřadnici y :

Při dosavadní praxi je vždy střednímu poledníku pásu o délce λ_0 přiřazena hodnota $y = 500 \text{ km} = 500\,000 \text{ m}$. Tato hodnota v podstatě posouvá počátek souřadného systému o 500 km směrem na západ. Takováto volba počátku postačuje pro užívané pásy o šířkách 6° a 3° . Postačovala i pro mezipásové převody, kdy byly transformovány souřadnice bodů z úzké překrytové části na okrajích sousedních pásů do maximální vzdálenosti desítek kilometrů za hranice pásů.

Pro souřadnici y je při ciferném vyjádření v metrech rezervováno 6 cifer před desetinnou čárkou a bezprostředně před nimi 1 - 2 cifry pro číslo pásu, např.

$$Y = \underbrace{13424\,532,783}_{\substack{\text{číslo } y \\ \text{pásu}}}$$

Protože požadujeme univerzální postup i program výpočtu, je nutno nejen vypočítat správnou hodnotu transformovaných souřadnic, ale tyto souřadnice i jednoznačně číselně vyjádřit a tedy i vytisknout. V této souvislosti vyvstávají některé problémy s ciferným vyjádřením souřadnice Y_2 .

Provádíme-li transformace z pásu do pásu i pro body značně vzdálené /více než 500 km/ od středního poledníku pásu, dosavadní vyjádření Y a rezervování nutného počtu cifer nepostačuje. Gaussův pás n_2 , do něhož provádíme převod, respektive jeho souřadnou soustavu je nutno rozšířit daleko za dosavadní hranici, takže je nutno uvažovat "široké" pásy o šířce L_2 až 9° i více. I když jde o případy prakticky výjimečné, kdy délkové zkreslení dosahuje neúnosných hodnot, je nutno je přesto uvažovat a řešit.

Protože Y je uvažováno a počítáno vztahem (12)

$$Y_2 = n_2 \cdot 1000000 + 500000 + y_2$$

pak pro $|y_2| \geq 500$ km nutně dojde k narušení čísla pásu n_2 a tím k nesmyslnému výsledku. Tyto případy se mohou projevit zvláště při transformacích bodů v rovníkových oblastech, kdy délková hodnota 1° zeměpisné délky je maximální, a to až cca 111,7 km.

Tuto obtíž lze řešit např. tak, že střednímu poledníku pásu by byla přiřazena souřadnice y nikoliv 500 km, ale mnohem větší, např. 1000 km nebo ještě více. Touto volbou by však vznikl nepřehled v souřadných soustavách s následným množstvím chyb při používání souřadnic bodů v různých soustavách. Tento způsob řešení je jistě nepraktický a nutno ho zavrhnout.

Lepším řešením je uvažovat pro vyjádření a tisk hodnoty y ještě 1 cifru navíc, tj. celkem 7 namísto dosavadních 6 cifer před desetinnou čárkou, např.

$$Y = \underbrace{131084 \ 217,543}_{\substack{\text{číslo} \\ \text{pásu}} \quad y}$$

Toto řešení je ovšem jen řešením částečným a dává správný výsledek jen pro y v intervalu

$$-500 < y < 10000 \text{ km} \quad (13)$$

Je-li však $y_2 < -500$ km, pak součet $y_2 + 500000$ v rovnici (12) je číslo záporné a dojde k narušení čísla pásu n_2 u souřadnice Y_2 . Výsledek úvah pro tento způsob řešení a vyjádření Y_2 lze zahrnout do následujících závěrů:

- není-li číslo pásu n_2 předem voleno /indikací otazníku/ nebo je-li prováděn převod do nižšího pásu stejné šířky, nemá smysl se otázkou souřadnice Y zvlášť zabývat.
- Je-li n_2 předem zvoleno a zároveň je prováděn převod do vyššího pásu, pak je nutno věnovat pozornost bodům, které leží cca 150 km a více za hranicí pásu. Pro tyto body je vhodné určit z mapy přibližně zeměpisné souřadnice φ_p, λ_p s přesností alespoň na minuty. Dále pak testovat, zda je splněn velmi přibližný vztah

$$111,7 \cdot (\lambda_p - \lambda_o) \cos \varphi_p > -500 \text{ km} \quad (14)$$

Třetím možným řešením a pro počítač lehce proveditelným, je vyjádření a tisk

výsledné Y_2 ve 2 samostatných částech n_2 , $y_2 + 500$, které z hlediska tisku jsou vzájemně nezávislé. Konečná úprava tisku by byla např.

$$Y_2 = 13\ 1084217,543$$

nebo s dosazením jedné mezery

$$Y_2 = 13\ 1084\ 217,543$$

Při $y_2 < -500$ km by však bylo vytištěno číslo $y_2 - 500000$ se znaménkem minus.

Např. pro 13. pás a $y_2 = -637256,752$ m by byl tištěn výsledek

$$Y_2 = 13\ -137256,752$$

Tato třetí varianta vyjádření a tisku Y_2 nepřináší oproti předcházejícímu způsobu žádné výhody, spíše naopak může zásadně zkreslit výsledek. Je proto nejlépe tisknout Y_2 jako jediné číslo s jedním významovým ciferným místem navíc při respektování uvedené podmínky (14).

Je nutno ještě poznamenat, že problematika vyjádření souřadnice Y_2 v rozšířeném tvaru přichází v praxi v úvahu jen opravdu výjimečně. Pouze v některých speciálních případech, kdy je třeba transformovat značně rozsáhlé území do jediného pásu, je třeba brát tyto skutečnosti v úvahu. Program výpočtu však musí s těmito eventualitami počítat a musí umožňovat i pro výjimečné případy řešení i jednoznačné vyjádření výsledku.

5. Z á v ě r

Program výpočtu pro samočinný počítač MINSK-22 byl skutečně zpracován podle zásad a vzorců uvedených v tomto článku. Protože konstanty elipsoidu i všechny pomocné konstanty musí být pro výpočet dosazeny s maximálně možnou přesností a souřadnice X, Y jsou vždy nejméně deseticiferná čísla, bylo v programu použito dvojnásobné strojové aritmetiky pomocí systému DAK.

Vnitřní přesnost zobrazení proměnných a vedení výpočtu ve vnitřní paměti počítače je upraveno s přesností řádově na 10^{-7} metru. Přesnost výpočetních vzorců pro pásy do 7° byla odhadnuta na základě rozborů posledních členů určujících rovnic cca na 10^{-6} metru. Ověření těchto předpokladů bylo prováděno experimentálně praktickými výpočty na počítači. Výstup výsledných souřadnic X_2, Y_2 je proveden tiskem na 4 desetinná místa /tj. na 0,0001 m/ se zaokrouhlováním poslední

cifry. Skutečná praktická přesnost pro běžné případy je v podstatě dána právě přesností tisku a činí tedy

$$\varepsilon_{x_2}, \varepsilon_{y_2} \leq 0,00005 \text{ metru} \quad (15)$$

Přesnost tisku je tedy nižší než přesnost výpočtu a z tohoto důvodu nebyl ani prováděn podrobný teoretický rozbor. Pouze pro body značně vzdálené od středního poledníku transformačního pásu vzroste absolutní velikost členů výpočetních rovnic natolik, že přesnost vypočteného výsledku je nižší než přesnost tisku. Přesné nalezení hranice v závislosti na $(\lambda - \lambda_0)$ nebylo zatím provedeno, protože tyto extrémní případy v praxi zřejmě nepřicházejí v úvahu.

Namísto toho bylo vypočteno množství praktických příkladů na počítači MINSK-22. Pro nejrůznější případy a kombinace byly vždy zvoleny počáteční souřadnice x_1, y_1 a programem vypočteny transformované x_2, y_2 spolu se zeměpisnými souřadnicemi φ, λ . Vytištěné x_2, y_2 byly vyděrovány do děrné pásky a předloženy znovu počítači k provedení zpětné transformace. Přestože při tomto postupu dochází k dvojitému zaokrouhlování mezivýsledků, byly zjištěny rozdíly o 1 na posledním tištěném místě jen u 18% případů. Velmi výhodnou kontrolou byla zároveň identita vypočtených zeměpisných souřadnic φ, λ , které jsou tištěny s přesností 0,000001 vteřiny. Protože při zpětné transformaci probíhá výpočet v podstatě nezávislou cestou proti výpočtu prvému, zvláště při vzájemně rozdílných šířkách obou pásů, lze uvedené kontroly považovat za dostačující. Experimenty potvrdily, že přesnost uvedená v (15) je zaručena nejméně pro $(\lambda - \lambda_0) < 4^\circ$. Doba trvání výpočtu 1 bodu činí 18,5 vteřiny bez ohledu na způsob zadání a hodnoty souřadnic.

Zbývá teoreticky dořešit problémy přesnosti výsledků při použití programu k transformacím pro velmi široké Gaussovy pásy. Praktická potřeba si zatím řešení těchto otázek nevynucuje. Přesnost výpočtu i přesnost tisku lze jednoduchými úpravami ještě značně zvýšit.

Popsaný program výpočtu umožňuje při vhodné a vtipné volbě základních charakteristik v zadání dosti široké a všestranné použití. Transformované pravoúhlé Gaussovy souřadnice jsou vypočteny se značnou přesností, takže programu lze využít i k transformaci bodů základní sítě, k sestavení seznamů a katalogů geodetických bodů, k vytváření místních souřadných soustav, k výpočtu zeměpisných souřadnic atd. Při změně parametrů elipsoidu a některých koeficientů určujících rovnic ho lze použít i k výpočtům pro jiný referenční elipsoid.

- [1] Prof. Dr. Ing. Josef RYŠAVÝ : Vyšší geodesie, Praha 1947
- [2] Prof. Dr. Ing. Josef BÖHM : Vyšší geodesie, skripta SNTL
- [3] TARCZY - HORNOCH - CHRISTOV: Tabulky pro elipsoid Krasovského, Buda-
pest 1959
- [4] Ing. Libor FILIPSKÝ: Transformace rovinných souřadnic X, Y Gaussova zobra-
zení na zeměpisné φ, λ metodou pomocného bodu, Vojenský
topografický obzor 1/72.

Došlo dne 5. 12. 1972

Určení souřadnic bodu protínáním při měření délce a směrníku

1. Úvod

Již řadu let jsou u jednotek TS-ČSLA používány kromě vteřinových teodolitů také rádiové dálkoměry a gyroteodolity. Těmito přístroji může být určována poloha jednotlivých bodů. Přímé měření směrníků, dlouhých vzdáleností a úhlů jako určujících prvků umožňuje určit polohu bodů novými, dosud málo používanými metodami. Tyto metody umožňují určovat polohu bodů v krátkých časových termínech, bez ohledu na povětrnostní podmínky, denní a roční dobu a v prostorech s malou hustotou daných geodetických bodů.

Pro vytváření sítí geodetických bodů se používá zejména metody protínání vpřed z délek /trilaterace/, která je dobře teoreticky rozpracována v [1]. Teoretický rozbor přesnosti metody protínání vpřed z délek je také uveřejněn v [2].

Jednotlivé body jsou zpravidla určovány dlouhým rajonem s přímo měřenou vzdáleností /rádiovým nebo světelným dálkoměrem/, s geodetickou orientací na známém bodě. Tato metoda je také hojně používána v civilním sektoru a je pro ni zpracován podrobný technologický postup. Metoda určování bodů rajonem s použitím gyroteodolitu je rozebrána například v [4].

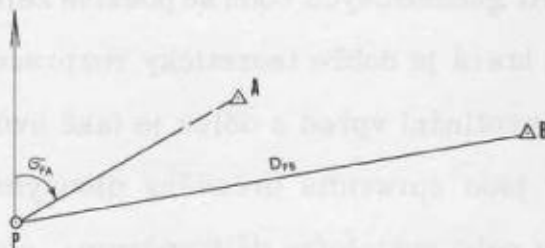
Jiné metody jsou v praxi dosud málo používány, zejména v důsledku jejich malé znalosti a popularizace.

V článku bude popsána jedna z možných metod určování polohy bodů, kterou je také možno nazvat : protínání z délky a směrníku. Rozsah a forma článku jsou voleny tak, aby posloužily hlavně technikům v praxi.

Použité symboly a označení:

$\triangle A$	geodetický daný bod $A(x, y)$
$\circ P$	určovaný bod
\uparrow	směr rovnoběžky se středním poledníkem pásu
σ_{PA}	směrník z bodu P na bod A
D_{PB}	vzdálenost mezi body P a B v zobrazovací rovině
$PO \dashrightarrow \triangle A$	směr měřený z bodu P na bod A
x_A, y_A	pravoúhlé souřadnice bodu A
\dot{x}_P, \dot{y}_P	pravoúhlé souřadnice bodu P ve vlastní souřadnicové soustavě
m_σ	střední chyba měření směrníků
m_D	střední chyba měření vzdáleností
m_x, m_y	střední souřadnicové chyby
M	střední polohová chyba
dx, dy $d\sigma, dD$	označení diferenciálních změn
$\Delta x, \Delta y$ $\Delta \sigma, \Delta D$	označení skutečných chyb
α, β, ω	označení úhlů

2. Náčrt zaměření a definice úlohy



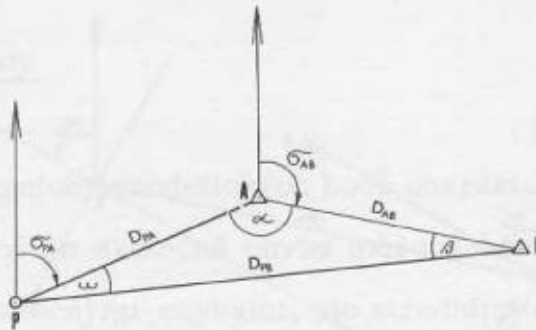
Obr. 1

- Dáno: $A(x, y), B(x, y)$
- Měřeno: σ_{PA}, D_{PB}
- Určit: $P(x, y)$
- Situace: Je optická viditelnost z bodu P na bod A , který může být i nepřístupný /např. věž kostela/, ale je signalizován nebo signalizovatelný. Na bod B nemusí být optická viditelnost.
- Přístroje: Gyroteodolit /nebo teodolit pro astronomické měření azimutu/ a rádiový dálkoměr.

3. Způsoby výpočtu souřadnic bodu P

Souřadnice bodu P lze počítat více způsoby, z nichž některé jsou dále uvedeny.

3.1. Převedení úlohy na protínání vpřed nebo na rajon



Obr. 2

Ze souřadnic daných bodů A, B vypočteme vzdálenost D_{AB} a směrnik σ_{AB} . Úhel α vypočteme jako rozdíl směrniků: $\alpha = \sigma_{AP} - \sigma_{AB}$, pak sinovou větou vypočítáme úhel ω , dále úhel β /respektive i vzdálenost D_{AP} / a převedeme úlohu na protínání vpřed nebo na výpočet rajonů.

3.2. Výpočtem průsečíku kružnice a přímky

Polohu bodu P lze určit také jako průsečík kružnice o poloměru D_{BP} opsané z bodu B a orientované přímky procházející bodem A . V tomto případě však vzorce pro výpočet polohy bodu P mají poměrně složitý tvar:

$$\begin{aligned}x_P &= x_B + b \cdot C + D \cdot E \\y_P &= y_B - b \cdot D + C \cdot E,\end{aligned}\quad (1)$$

kde

$$C = \frac{1}{1 + \cotg \sigma_{AP}}$$

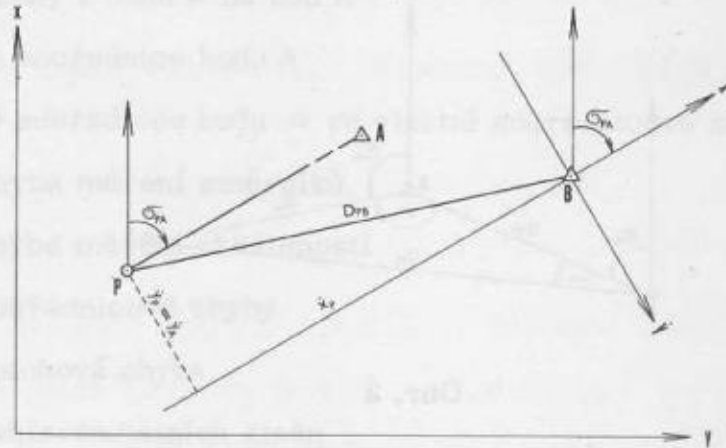
$$D = C \cdot \cotg \sigma_{AP}$$

$$E = \frac{D_{BP}^2}{D_{AB}^2} (1 + \cotg^2 \sigma_{AP}) - b^2$$

$$b = x_A - x_B - (y_A - y_B) \cotg \sigma_{AP}.$$

3.3. Výpočet ve vlastní soustavě souřadnic a transformací

Další způsob spočívá v tom, že souřadnice bodu P vypočítáme nejprve ve vlastní soustavě souřadnic pootočené o úhel σ_{PA} , s počátkem v bodu B , a potom je transformujeme do systému souřadnic daných bodů /viz obr. 3/.



Obr. 3

Nejprve vypočteme

$$\dot{y}_A = (y_A - y_B) \cos \sigma_{PA} - (x_A - x_B) \sin \sigma_{PA}. \quad (2)$$

Z obrázku 3 je zřejmé, že:

$$\begin{aligned} \dot{y}_P &= \dot{y}_A, & \text{a dále vypočteme} \\ \dot{x}_P &= \pm \sqrt{D_{PB}^2 - \dot{y}_P^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

když znaménko \dot{x}_P snadno určíme podle náčrtu a transformací získáme výsledné souřadnice:

$$\begin{aligned} x_P &= x_B + \dot{x}_P \cos \sigma_{PA} - \dot{y}_P \sin \sigma_{PA} \\ y_P &= y_B + \dot{y}_P \cos \sigma_{PA} + \dot{x}_P \sin \sigma_{PA}. \end{aligned} \quad (4)$$

Výpočet lze výhodně provést na elektronickém kalkulačním stroji /např. typu ELKA/, který má zabudovaný program pro výpočet odmocniny. Mezi další výhody tohoto způsobu výpočtu patří:

- malý počet hledání v tabulkách goniometrických funkcí /hledáme jen $\sin \sigma_{PA}$ a $\cos \sigma_{PA}$ /

- žádné aritmetické operace s úhly nejsou
- nižší počet výpočetních operací oproti jiným způsobům výpočtů.

Z těchto důvodů jej doporučuji k používání.

Výpočet lze provést i na ručních kalkulačních strojích s použitím formuláře /vzor v příloze/ do něhož lze zapsat výpočet více kombinací. Správnost výpočtu ověříme zpětným výpočtem určujících prvků.

4. Přesnost metody

Přesnost určení polohy geodetických bodů charakterizujeme různými způsoby. Protože zpravidla neznáme skutečné chyby měřených veličin, nevyjadřujeme přesnost určených bodů skutečnými chybami, ale středními chybami odvozenými na základě zákona o hromadění středních chyb. Pro přesně určované body /např. trigonometrické/ se jako kritéria používají střední souřadnicové chyby m_x, m_y , získané z vyrovnání, dále střední křivka chyb nebo střední elipsa chyb. Bližší vysvětlení najde čtenář v [2]. Pro body menší přesnosti se nejčastěji jako kritéria polohové přesnosti používá střední polohová chyba M , přičemž $M^2 = m_x^2 + m_y^2$.

4.1. Odvození střední polohové chyby

Vyjděme z rovnic pro výpočet směrníku a délky ze souřadnic:

$$\operatorname{tg} \sigma_{PA} = \frac{y_A - y_P}{x_A - x_P} \quad (5)$$

$$D_{BP}^2 = (x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2. \quad (6)$$

Jejich diferencováním a úpravou dostaneme soustavu rovnic:

$$dy \cdot \cos \sigma_{PA} - dx \cdot \sin \sigma_{PA} - D_{AP} d\sigma_{PA} = 0 \quad (7)$$

$$dy \cdot \sin \sigma_{BP} + dx \cdot \cos \sigma_{BP} - dD_{BP} = 0.$$

Po řešení rovnic (7), nahrazení diferenciálních změn skutečnými chybami a po vhodné úpravě získáme rovnice pro skutečné chyby souřadnic bodu P :

$$\Delta x = \frac{\cos \sigma_{PA} \Delta D_{BP} - D_{AP} \sin \sigma_{BP} \Delta \sigma_{PA}}{\cos \omega} \quad (8)$$

$$\Delta y = \frac{\sin \sigma_{PA} \Delta D_{BP} + D_{AP} \cos \sigma_{BP} \Delta \sigma_{PA}}{\cos \omega}$$

	1	2	3	4	5	6
A	1					
B	2					
P	2067					
x_A	55 868,47					
x_B	54 042,46					
$x_A - x_B$	+ 1826,01					
y_A	71 450,67					
y_B	76 670,21					
$y_A - y_B$	-5219,54					
σ_{PA}	36°41' 05"					
$\cos \sigma_{PA}$	+0,801 933					
$\sin \sigma_{PA}$	+0,597 413					
$\dot{y}_A = \dot{y}_P$	-5 276,60					
D_{BP}	8 737,86					
\dot{x}	-6964,75					
x_P	51 609,51					
y_P	68 277,90					
$x_A - x_P$	+ 4 258,96					
$y_A - y_P$	+ 3 172,77					
$\text{tg } \sigma_{PA}$	+0,744 964					
σ_{PA}	36°41' 05"					
$x_B - x_P$	+ 2 432,95					
$y_B - y_P$	+ 8 392,31					
D_{BP}	8 737,86					

Poznámka: Formulář lze uspořádat i jinak, doplnit výpočetními vzorci, vyhradit místo pro náčrty apod.

Po přechodu ke středním chybám souřadnic dostaneme:

$$m_x^2 = \frac{D_{AP}^2 \sin^2 \sigma_{BP} m^2 \sigma_{PA} + \cos^2 \sigma_{PA} m^2 D_{BP}}{\cos^2 \omega} \quad (9)$$

$$m_y^2 = \frac{D_{AP}^2 \cos^2 \sigma_{BP} m^2 \sigma_{PA} + \sin^2 \sigma_{PA} m^2 D_{BP}}{\cos^2 \omega}$$

a jejich sečtením

$$M^2 = \frac{D_{AP}^2 m^2 \sigma_{PA} + m^2 D_{BP}}{\cos^2 \omega} \quad (10)$$

Z rovnice (10) lze usoudit, že velikost střední polohové chyby M závisí kromě na vzdálenosti D_{AP} a na přesnosti měření vzdálenosti a směrníku velmi značně také na úhlu ω , pod nímž se směry na dané body A a B v bodě P protínají. Střední polohová chyba je maximální pro $\omega = 90^\circ / 270^\circ$ a minimální pro $\omega = 0^\circ / 180^\circ$.
Ve druhém případě přejde rovnice (10) ve tvar:

$$M^2 = D_{AP}^2 m^2 \sigma_{PA} + m^2 D_{BP} \quad (11)$$

Stejný tvar má i rovnice pro střední chybu v poloze bodu určeného rajonem, při čemž ovšem $\Delta A \equiv \Delta B$.

Přehled o velikosti střední chyby M pro různé vzdálenosti D_{AP} a různý úhel ω při

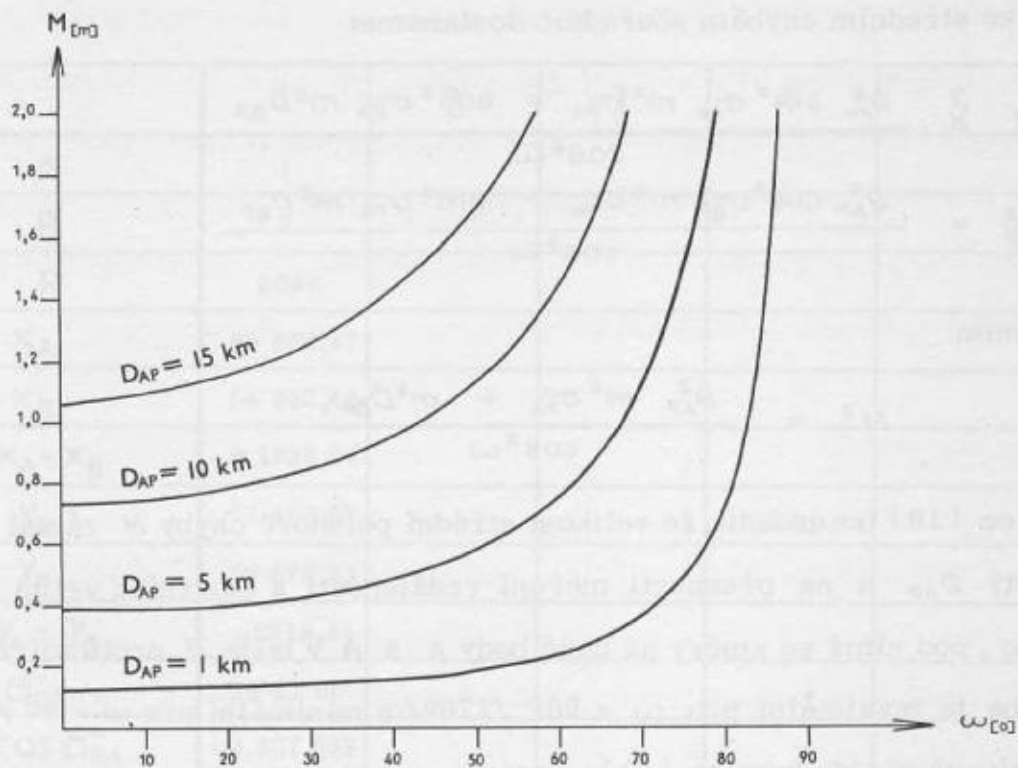
$$mD = \pm 10 \text{ cm}$$

$$m\sigma = \pm 15'' \text{ }^x/ \text{ poskytuje tabulka č. 1 a graf č. 1.}$$

$\omega [^\circ]$ $D [km]$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	85	87
1	0,12	0,13	0,13	0,14	0,16	0,19	0,25	0,36	0,71	1,42	2,37
2	0,18	0,18	0,19	0,20	0,23	0,27	0,35	0,51	1,01	2,03	3,38
5	0,38	0,38	0,40	0,43	0,49	0,59	0,75	1,10	2,17	4,33	7,20
10	0,73	0,74	0,78	0,85	0,96	1,14	1,47	2,14	4,23	8,42	.
15	1,05	1,11	1,16	1,25	1,43	1,70	2,19	3,20	6,32	.	.

tabulka č. 1

^{x/} Poznámka : jinak ve vzorcích je skutečná i střední chyba směrníku myšlena v obloukové míře



graf č. 1

5. Zkušební měření a jeho výsledky

Teoretické závěry o metodě byly ověřovány tím, že byl znovu určován známý trigonometrický bod a získané souřadnice porovnávány s danými. Přitom všechny známé body byly považovány za bezchybné.

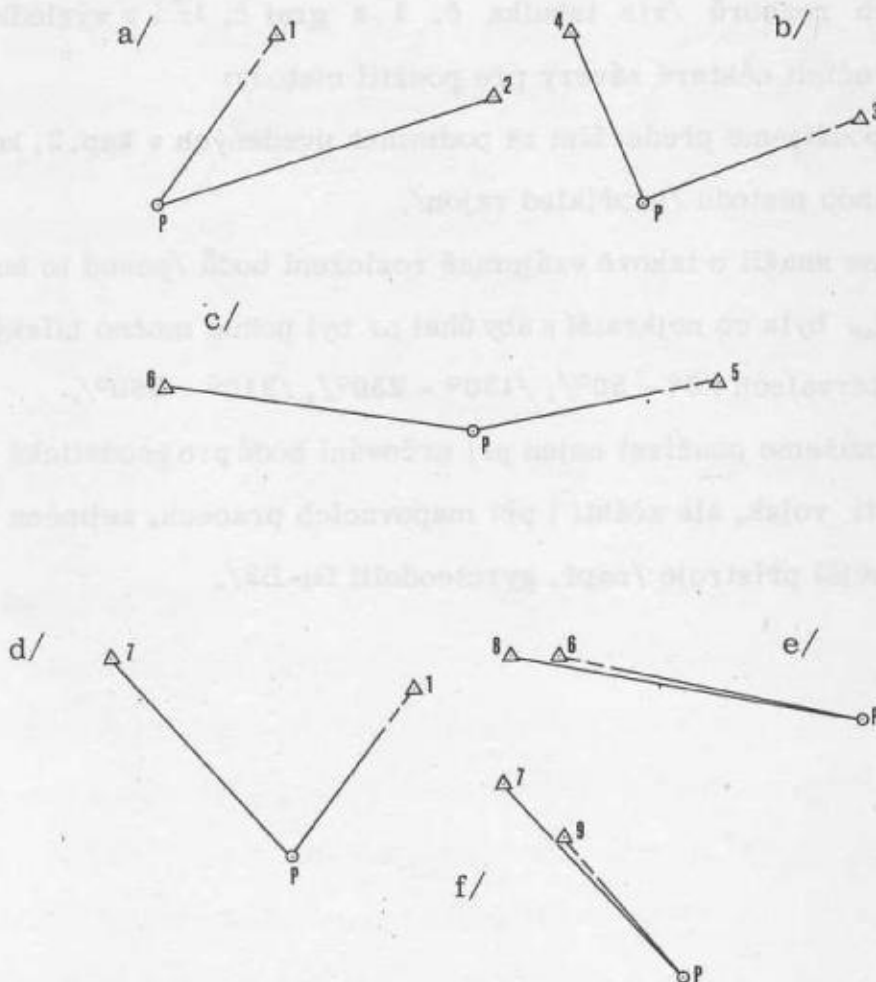
5.1. Použité přístroje, měření prvků a jejich zpracování

Vzdálenosti byly měřeny rádiovým dálkoměrem GET-B1. Tranzitní čas byl určován z měření ve dvou sériích /hrubé čtení, 12 skupin jemného čtení, hrubé čtení/. Meteorologické prvky /tlak vzduchu a teploty/ byly určovány na koncových bodech měřené vzdálenosti před a po jemném čtení aneroidy zn. Short a Mason a Asmano-

vými psychrometry. Převýšení mezi body bylo určeno ze známých výšek /v praxi by jej bylo často nutno určovat buď z výšek odpíchnutých z mapy nebo určit převýšení barometricky/. Fyzikální i matematické redukce byly provedeny pomocí tabulek. Azimuty byly určeny gyroteodolity Gi-B1 ze dvou sérií; v každé sérii pak výpočtem ze 4-5 vratných poloh setrvačnicku. Adiční konstanta byla určena před i po měření azimutů a prakticky se nezměnila. Azimuty byly převedeny na směrníky připočtením meridiánové konvergence a opravy ze zobrazení směru do roviny. Souřadnice pro výpočet meridiánové konvergence byly odměřeny z mapy. Vliv složky tížnicové odchylky byl v daném případě zanedbatelný a nebyl uvažován. Měření byla vykonána za různého počasí v měsících dubnu a květnu při teplotách vzduchu $+2^{\circ}\text{C}$ až $+18^{\circ}\text{C}$.

5.2. Výsledky měření

Pro výpočet bylo vybráno 6 různých kombinací. Vzájemné rozložení daných bodů a určovaného bodu je znázorněno na obrázcích č. 4a - 4f.



Přehled o přesnosti měřených prvků, vypočtené souřadnice bodu P , jejich skutečné chyby i skutečnou a střední polohovou chybu bodu P obsahuje tabulka č. 2.

Výsledky zkoušky vcelku dobře potvrdily správnost teoretických předpokladů.

Tabulka č. 2

Dané body		ω	D_{AP} /přibližná/ km	$\Delta\sigma_{PA}$	ΔD_{BP}	Vypočtené souřadnice		Skutečné chyby		ΔP	M
A	B					x m	y m	Δx m	Δy m		
1	2	37 09	5,3	-10,8	-0,06	609,51	277,90	-0,28	+ 0,15	0,32	0,50
3	4	91 18	6,0	- 9,1	-0,08	603,67	262,36	-6,12	-15,39	16,56	16,51
5	6	159 36	6,3	+ 2,7	-0,07	609,86	277,69	+ 0,07	-0,06	0,09	0,50
1	7	78 16	5,3	-10,8	-0,14	611,26	279,17	+ 1,47	+ 1,42	2,04	2,48
6	8	0 10	7,8	+ 1,8	-0,06	609,72	277,67	-0,07	-0,08	0,11	0,66
9	7	0 37	4,7	+ 8,9	-0,14	609,77	277,50	-0,02	-0,25	0,25	0,35

6. Zhodnocení metody

Z chybových rozborů /viz tabulka č. 1 a graf č. 1/ i z výsledků praktické zkoušky můžeme učinit některé závěry pro použití metody:

a/ metodu použijeme především za podmínek uvedených v kap. 2, když nebudeme moci použít jinou metodu /například rajon/.

b/ budeme se snažit o takové vzájemné rozložení bodů /pokud to bude možné/, aby vzdálenost D_{AP} byla co nejkratší a aby úhel ω byl pokud možno blízký 0° či 180° nebo alespoň v intervalech $/0^\circ - 50^\circ/$, $/130^\circ - 230^\circ/$, $/310^\circ - 360^\circ/$,

c/ metodu můžeme používat nejen při určování bodů pro geodetické zabezpečení bojové činnosti vojsk, ale zčásti i při mapovacích pracech, zejména budeme-li moci použít přesnější přístroje /např. gyroteodolit Gi-B2/.

Popsaná metoda je jen jednou z mnoha metod, jimiž lze zhušťovat bodové pole nejen pro účely geodetického zabezpečení bojové činnosti vojsk, ale i pro topografické mapování. Vznik nových metod určování bodů a jejich rozvoj je umožněn technickým pokrokem v konstrukci geodetických přístrojů. Pružné využívání možností těchto přístrojů a pohotová volba vhodných metod umožňuje snížit závislost geodetů na počasí, hustotě geodetické sítě a stavu její signalizace. Nové body je možno určovat rychleji a levněji. Proto je třeba nové metody popularizovat a zavádět je do praxe.

L I T E R A T U R A

- [1] J. VYKUTIL: Výpočet a vyrovnání délkově měřených sítí. Skripta, VAAZ Brno 1961
- [2] Zd. NEVOSÁD: K polohové přesnosti bodů určených protínáním vpřed a zpět. Habilitační práce, Brno 1966
- [3] Zd. NEVOSÁD: Základní souřadnicové výpočty v geodézii, I. díl, Skripta, VAAZ Brno 1970
- [4] K. OKTÁBEC: Rozbor polohové přesnosti bodů určených rajonem. Diplomová práce, VAAZ Brno 1966
- [5] J. KOTVA: Rozbor a ověření polohové přesnosti geodetických bodů určených speciálními metodami protínání při malé hustotě geodetického podkladu. Diplomová práce, VAAZ Brno 1969.

Došlo dne 15. 12. 1972

Řešení obecné úlohy determinace liniové informace v digitálním tvaru s možností její současné rektifikace

1. Ú v o d

Mechanizace a automatizace kartografických prací se neobejde bez možnosti uchování informací o digitalizovaných křivkách /liniích/ v pamětech samočinných počítačů s tím, že bude kdykoliv možno původní tvar křivky s danou přesností opět determinovat. Jde tedy o determinaci křivky v digitální formě a to v celém jejím průběhu tak, aby jí bylo možno použít pro řešení dalších úloh. Řešení tohoto problému nelze chápat pouze jako možnost rekonstrukce původní křivky v grafické formě. Digitální vyjádření křivky nám umožňuje použití těchto informací v nejmodernějších elektronických /především číselných/ zařízeních. Jde o využití takových číselných informací, které lze chápat jako graf. Číselné vyjádření informací umožňuje jejich zpracování v mnoha vzájemných vazbách a závislostech. Obecně je řešena úloha determinace průběhu funkce o jednom argumentu, která je definována posloupností bodů daných rovinnými pravoúhlými souřadnicemi. Především půjde o řešení těchto úloh:

- a/ determinace původního průběhu křivky za účelem její rekonstrukce v původní nebo v generalizované podobě;
- b/ grafické vyjádření jakékoliv závislosti;
- c/ vyhledání hodnoty digitálně určené funkce k danému argumentu;
- d/ analýza křivek /inflexní body, extrémy, křivosti apod./;
- e/ kresba pomocných znaků, popisů apod.;
- f/ modelování různých závislostí a jiné úlohy.

V kartografii budou nejpoužívanějšími úlohy uvedené ad a/ až d/. Grafické znázornění je a dlouhou dobu zůstane hlavní formou znázornění také liniových informací. Toto tvrzení je zdůvodněno dosavadními zvyklostmi a i tím, že je jedním z nejefektivnějších. Grafické znázornění informací umožňuje na malém prostoru znázornit informace o značné entropii /množství informace/, rychle odlišit podstatné informace od méně podstatných a tím získání potřebného přehledu při přímém použití člověkem. Tato výhoda vystupuje především do popředí v podmínkách armády.

Vhodnost grafických výstupů ze samočinných počítačů si vynutila v posledních letech prudký rozvoj automatických a poloautomatických koordinátografů. Nejpreciznější z nich mohou být podle přání zákazníka vybaveny malými specializovanými samočinnými počítači, které kromě jiného zabezpečují i determinaci linií tzv. interpolátory. Tento způsob je poměrně málo efektivní, poněvadž umožňuje pouze omezené jednostranné využití poměrně nákladného počítače a stejně je nutné pro většinu úloh řešit determinaci v samočinných počítačích. Rychlost specializovaných samočinných počítačů bývá relativně oproti velkým výpočetním systémům velmi malá. Budoucnost bude proto pravděpodobně patřit velkým rychlým systémům s vnitřním sdílením času a s vícekanálovými vstupy i výstupy, umístěnými většinou přímo u uživatelů.

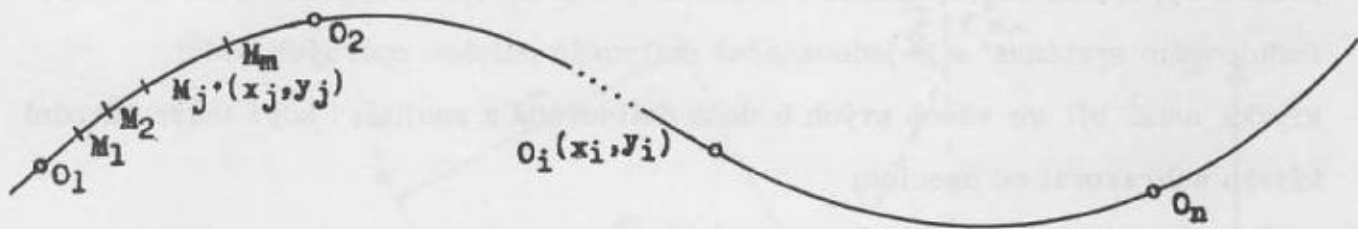
2. Obecná úloha determinace liniové informace

2.1. Zadání úlohy

Liniová informace /dále křivka/ je spojitá a je určena posloupností opěrných bodů O_i , ležících na křivce a daných souřadnicemi x_i , y_i ve zvoleném pravoúhlém systému /viz obr. 1/. Předpokládá se, že body O_i určují křivku tak vhodně, že lze zachovat přesnost původního tvaru křivky /zajištěno digitalizačním postupem/.

Ze změn x_i a y_i lze determinovat průběh křivky v libovolném místě určením souřadnic mezilehlých bodů M_j . Vzdálenost mezilehlých bodů může být libovolně malá.

Kritériem přesnosti je pak vzdálenost mezilehlých bodů od původní křivky.



Obr. 1

2.2. Možná řešení úlohy

S maximální přesností lze křivku vyjádřit polynomem odpovídajícího stupně vzhledem k počtu opěrných bodů. Vypočtená funkce bude mít minimální odchylky od křivky za předpokladu, že byly dostatečně hustě nebo vhodně voleny opěrné body.

Obdobně lze řešit determinaci křivky její náhradou polynomem s vyrovnáním.

Výpočetní postupy nejsou uváděny, poněvadž jsou všeobecně známé. Pro oba uvedené postupy jsou u většiny samočinných počítačů k dispozici potřebné podprogramy, které uvedené úlohy řeší většinou maticovým způsobem. Tyto postupy mají pro širší uplatnění některé nevýhody, spočívající především v časové náročnosti výpočtu, různosti stupně polynomu a jeho omezením kapacitou paměti počítače. S rostoucím stupněm polynomu se výpočet progresivně prodlužuje a současně prudce klesá jeho přesnost. Přes uvedené nevýhody mají tato řešení výhodu exaktnosti a vysoké přesnosti. Proto lze předpokládat, že budou vhodná pro řešení některých úloh, kde se vyžaduje vysoká přesnost a exaktnost výsledků.

Pro praktické použití nelze vyloučit ani náhradu posloupnosti bodů jinými, například exponenciálními funkcemi, případně použitím vektorového počtu. Půjde zpravidla o výjimečné speciální úlohy. Většinu úloh bude vhodné řešit postupem uvedeným ad 2.3. pro jeho rychlost a účelnost při použití na samočinném počítači. Pracuje totiž po jednotlivých krocích, což umožňuje současné výstupy a vede k úsporám strojového času.

2.3. Aproximativní způsob determinace křivky

Postup předpokládá determinaci křivky po jednotlivých úsecích s ohledem na předcházející i následující její průběh. Mezi krajními body úseku křivku nahradíme aproximativní funkcí, která musí splňovat tyto podmínky:

- průběh vypočtené křivky nesmí záviset na její poloze /umístění ve zvoleném souřadnicovém systému/ a je jednoznačně definován polohou opěrných bodů;
- křivka musí být ve všech svých bodech definována a spojitá, i když může původní křivku nahrazovat po úsecích;
- směr interpolace nemá mít vliv na průběh křivky.

Připustíme-li řešení, že křivka musí procházet krajními body a "přihlížet k bodu předcházejícímu a následujícímu", budeme do jisté míry uvedené požadavky splňovat.

Mohli bychom klást ještě další požadavky. Jejich splnění by však bylo na úkor jednoduchosti i rychlosti výpočtu a jeví se proto jako neefektivní.

Dále budeme řešit konkrétní úlohu pro 4 sousední opěrné body $O_i / i = 1, 2, 3, 4 /$ posloupnosti s tím, že v dalším kroku vždy postoupíme o 1 opěrný bod k řešení dalšího úseku $/ i = 2, 3, 4, 5 /$.

Nechť jsou dány opěrné body O_1, O_2, O_3, O_4 svými souřadnicemi x, y . Interpolujeme křivku mezi body O_2 a O_3 /viz obr. č. 2/. Zvolme místní souřadnicový systém $/ \xi, \eta /$ s počátkem v O_2 s osou $+ \xi$ procházející O_3 . Provedme transformaci $x, y \Rightarrow \xi, \eta$ podle známých vztahů

$$\begin{aligned} \xi_i &= (x_i - x_2) \cos \varepsilon + (y_i - y_2) \sin \varepsilon \\ \eta_i &= (y_i - y_2) \cos \varepsilon - (x_i - x_2) \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (1)$$

kde

$$\sin \varepsilon = \frac{y_3 - y_2}{s_{2,3}}; \quad \cos \varepsilon = \frac{x_3 - x_2}{s_{2,3}}; \quad s_{2,3} = \overline{O_2 O_3} = \xi_3$$

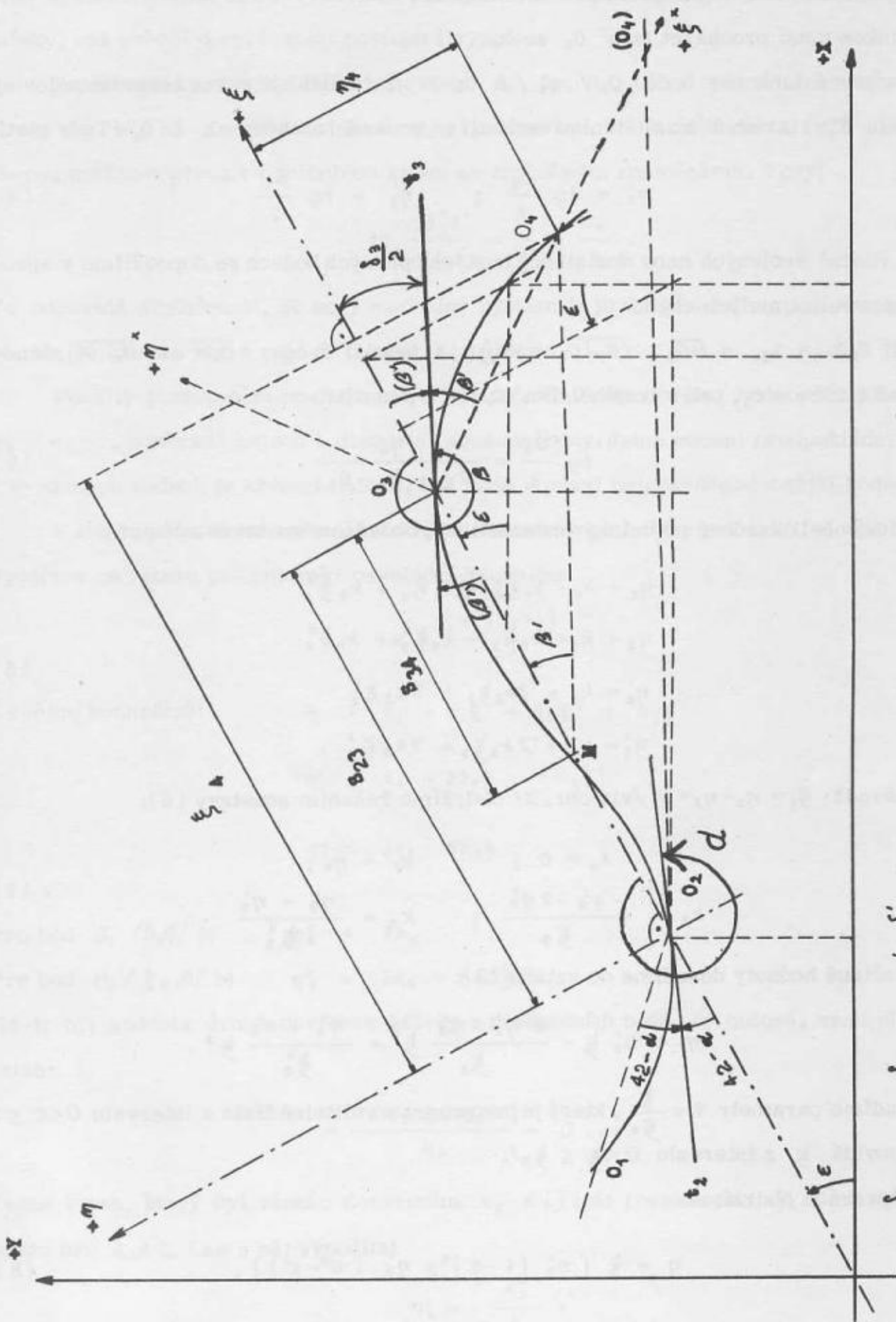
Vzorce pro zpětnou transformaci:

$$\begin{aligned} x_i &= x_2 + \xi_i \cos \varepsilon - \eta_i \sin \varepsilon \\ y_i &= y_2 + \xi_i \sin \varepsilon + \eta_i \cos \varepsilon \end{aligned} \quad (2)$$

Je zřejmé, že uvedený postup je zatím nezávislý na směru interpolace. Pro vlastní interpolaci použijeme aproximativně polynom 3. stupně ve tvaru:

$$\eta = k_0 + k_1 \xi + k_2 \xi^2 + k_3 \xi^3, \quad (3)$$

kde k_0 až k_3 jsou neznámé koeficienty, jejich výpočtem funkci determinujeme.



Obr. 2.

Pro splnění podmínek determinace uvedených v 2.3.:

- funkce musí procházet body O_2 a O_3
- derivace funkce v bodě $O_2 / \eta'_2 /$ a $O_3 / \eta'_3 /$ musí být rovna tangente poloviny úhlu δ /viz obr.2/ k zajištění návaznosti se sousedními body O_1 a O_4 . Tedy platí:

$$\eta'_2 = \operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2} ; \quad \eta'_3 = \operatorname{tg} \frac{\delta_3}{2} . \quad (4)$$

Při vhodně zvolených nebo dostatečně hustých opěrných bodech se dopouštíme v aproximaci velmi malých chyb.

Je-li $O_3O_4 = s_{34} = \overline{MO_3}$, $|O_4/O_3 = s_{23}$ a jsou-li úsečky $\overline{O_4M}$ a $\overline{O_2(O_4)}$ rovnoběžné s tečnou t_3 , pak v trojúhelníku O_4, M, O_3 platí:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_3}{2} = \frac{\eta_4}{s_{3,4} + \xi_4 - s_{2,3}} . \quad (5)$$

Vyjádríme-li uvedené podmínky matematicky, obdržíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \eta_2 &= k_0 + k_1 \xi_2 + k_2 \xi_2^2 + k_3 \xi_2^3 \\ \eta_3 &= k_0 + k_1 \xi_3 + k_2 \xi_3^2 + k_3 \xi_3^3 \\ \eta'_2 &= k_1 + 2k_2 \xi_2 + 3k_3 \xi_2^2 \\ \eta'_3 &= k_1 + 2k_2 \xi_3 + 3k_3 \xi_3^2 . \end{aligned} \quad (6)$$

Poněvadž $\xi_2 = \eta_2 = \eta_3 = 0$ /viz obr. 2/ obdržíme řešením soustavy (6):

$$\begin{aligned} k_0 &= 0 ; & k_1 &= \eta'_2 ; \\ k_2 &= \frac{-\eta'_3 - 2\eta'_2}{\xi_3} ; & k_3 &= \frac{\eta'_3 + \eta'_2}{\xi_3^2} . \end{aligned} \quad (7)$$

Vypočtené hodnoty dosadíme do vztahu (3):

$$\eta = \eta'_2 \xi - \frac{2\eta'_2 + \eta'_3}{\xi_3} \xi^2 + \frac{\eta'_3 + \eta'_2}{\xi_3^2} \xi^3 .$$

Dosadíme parametr $\tau = \frac{\xi}{\xi_3}$, který je pro program volitelné číslo z intervalu $0 < \tau \leq 1$ /odpovídá ξ z intervalu $0 < \xi \leq \xi_3$ /.

Po úpravách obdržíme:

$$\eta = \xi [\eta'_2 (1-\tau)^2 + \eta'_3 (\tau^2 - \tau)] , \quad (8)$$

což je konečný tvar funkce pro výpočet souřadnic η mezilehlých bodů na základě volitelného argumentu ξ . Získané souřadnice transformujeme podle (2) zpět do původ-

ního systému. Kontrolním výpočtem lze zjistit, že funkce splňuje výše uvedené podmínky, což svědčí o správnosti postupu i výpočtu.

Zavedeme-li si pro další krok /body O_2, O_3, O_4, O_5 / opět místní souřadnicovou síť ξ^x, η^x s počátkem v bodě O_3 , zjistíme na obr. 2, že hodnota $(\eta_2^x)' = -\eta_3'$ kterou můžeme převzít z minulého kroku se změněným znaménkem. Tedy:

$$\operatorname{tg} \frac{(\delta_3^x)'}{2} = -\operatorname{tg} \frac{\delta_3}{2} .$$

To odpovídá skutečnosti, že nový souřadný systém je proti původnímu pootočen právě tak, že úhel os ξ a ξ^x je tečnou t_3 půlen.

Použitý postup nám neumožňuje v počátečním /a koncovém/ bodě určit křivost $\eta_2' (\eta_3')$, poněvadž nejsou k dispozici sousední body. Jsme nuceni předpokládat, že v uvedených bodech je křivost nulová, což bude v praxi nejpravděpodobnější hodnota.

V tomto případě poloměr oskulační kružnice křivky $R \rightarrow \infty$ a pak také $\eta'' \rightarrow 0$.

Vyjděme ze vztahu pro poloměr oskulační kružnice

$$R = \frac{(1 + \eta'^2)^{\frac{3}{2}}}{\eta''}$$

a řešme konkrétně:

$$\eta = k_0 + k_1 \xi + k_2 \xi^2 + k_3 \xi^3$$

$$\eta' = k_1 + 2k_2 \xi + 3k_3 \xi^2$$

$$\eta'' = 2k_2 + 6k_3 \xi . \quad (9)$$

Pro bod $O_2 / 0,0/$ je $\eta''_2 = 2k_2$

Pro bod $O_3 / \xi_3, 0/$ je $\eta''_3 = 2k_2 + 6k_3 \xi_3$

Má-li být hodnota druhé derivace křivky v počátečním bodě O_2 nulová, musí platit vztah:

$$-\frac{2(\eta'_3 + 2\eta'_2)}{\xi_3} = 0 .$$

Tento vztah, který byl získán dosazením k_2 z (7) do rovnice pro η''_2 , má smysl pouze pro $\xi_3 \neq 0$. Lze z něj vypočítat

$$\eta'_2 = -\frac{\eta'_3}{2} .$$

Obdobně pro koncový bod musí platit:

$$\eta_3'' = -2k_2 - 6k_3\xi_3 = \frac{2(-\eta_3' - 2\eta_2')}{\xi_3} + 6 \frac{\eta_3' + \eta_2'}{\xi_3^2} \xi_3 = \ominus \quad (\text{pro } \xi_3 \neq 0)$$

Platí také

$$\eta_3' - 2\eta_2' + 3\eta_3' + 3\eta_2' = 0,$$

z čehož dostaneme:

$$\eta_3' = -\frac{\eta_2'}{2}. \quad (10)$$

Má-li tedy být v počátečním /koncovém/ bodě nulová křivost, musíme za hodnotu 1. derivace v tomto bodě dosadit polovinu záporné hodnoty 1. derivace v bodě následujícím /předchozím/, viz též obr. 2.

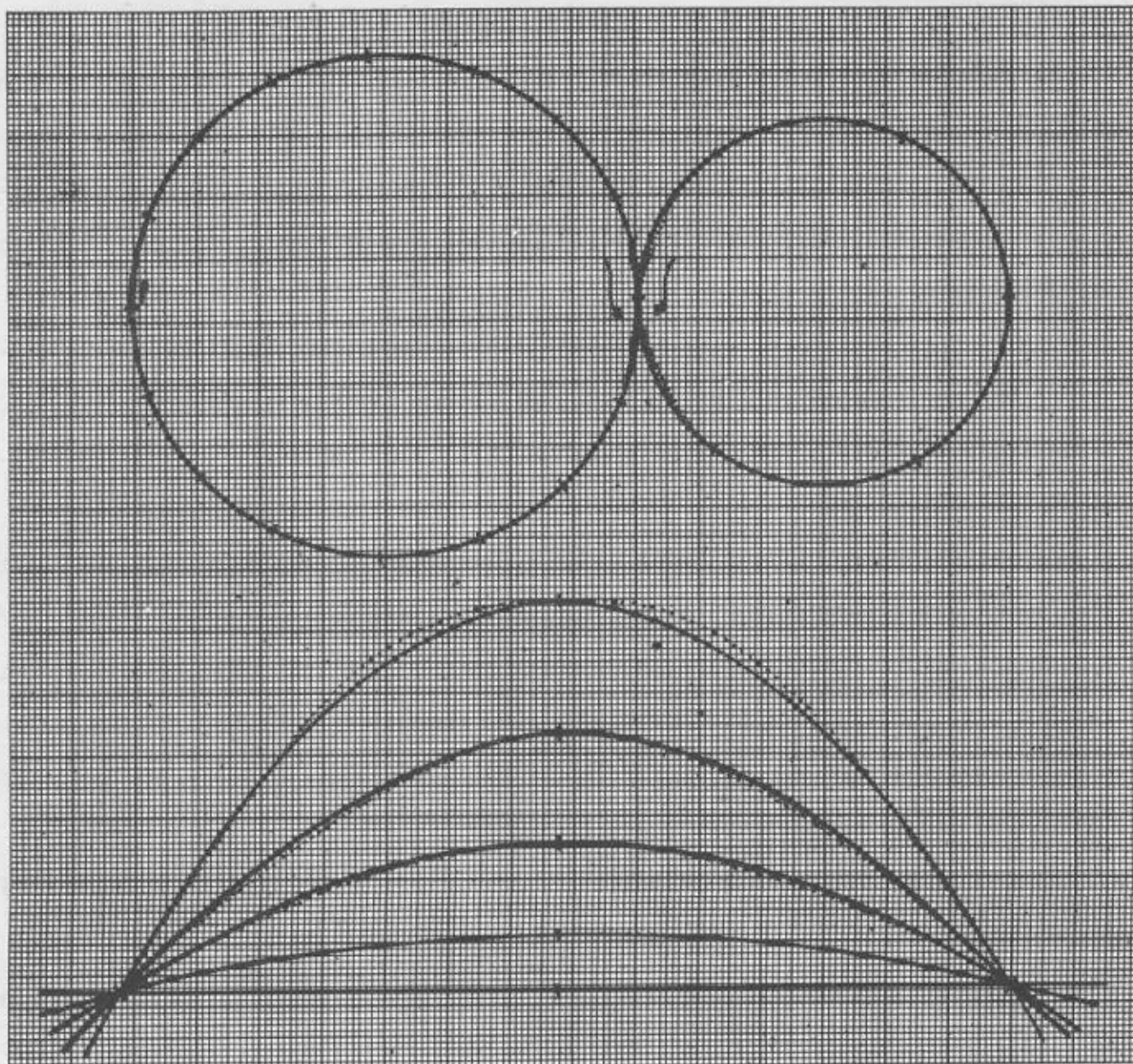
2.4. Výsledky praktických zkoušek

Podle popsaného algoritmu zpracoval ing. Jaroslav Mňuk program na samočinný počítač M-22. Poněvadž analytické vyšetření přesnosti aproximace je velmi obtížné, byly provedeny laboratorní testy. Současně byly hledány zásady optimální digitalizace z hlediska úspory práce a paměťových míst počítače. Křivky různé konfigurace byly různým způsobem digitalizovány, uvedeným způsobem determinovány a kontrolně graficky vyneseny. Vzhledem k tomu, že v době zkoušek nebyl k dispozici digitalizační ani vynášecí přístroj, bylo nutno testy odečítat i vynášet ručně. Z tohoto důvodu bude nutné závěry omezených zkoušek podrobit ještě důkladnější kontrole po dodání příslušných automatických zařízení. Vzorek testů je uveden na obr. 3; determinované čáry jsou vykresleny přerušovaně, původní křivka plně. Z rozboru zkoušek vyplývá:

- zhušťováním kroku při vhodné volbě opěrných bodů lze dosáhnout libovolné přesnosti determinace;
- volba opěrných bodů ve vhodných místech křivky vede ke značné úspoře paměti počítače bez újmy na přesnosti /asi 50 %/;
- funkce 3. stupně umožňuje značné přiblížení k původní křivce; v daném úseku vyřeší i inflexi.

Chyba v determinaci závisí především:

- na změně křivosti;
- na vzdálenosti opěrných bodů;



—+— původní křivka s opěrným bodem

..... křivka nově determinovaná

Obr. 3

- na konfiguraci křivky v okolí determinovaného úseku.

S využitím výsledků získaných z těchto zkoušek lze pro digitalizaci liniových prvků mapy pomocí poloautomatických zařízení vyslovit tyto požadavky:

- při středních změnách křivosti /testována vrstevnice v mapě 1:50 000/ volit základní krok jako 30-40násobek požadované přesnosti, tj. pro střední chybu $\pm 0,1$ mm asi 3 - 4 mm;
- tento krok v místech větších změn křivosti úměrně zhušťovat, prakticky však u spojitých čar nemá smysl volit menší krok než 1 mm;
- vždy zachovat zásadu, aby se směry ve dvou okrajových bodech úseku nelišily o více než 60 stupňů;
- v nespojitých místech křivky /bude se týkat i většiny začátků a konců křivek/ volit dva body těsně u sebe /0,2 - 0,4 mm/ a to na obou stranách zlomu;
- v místech inflexe nevolit opěrné body vůbec nebo v okolí inflexního bodu volit dva opěrné body z obou stran, je-li to nutné z výše uvedených důvodů;
- z technických důvodů nevolit ani u křivek konstantní křivost /kružnice, přímka/ krok větší než 10 mm.

Vzhledem k omezeným možnostem laboratorních testů jsou uvedená kritéria stanovena přísněji.

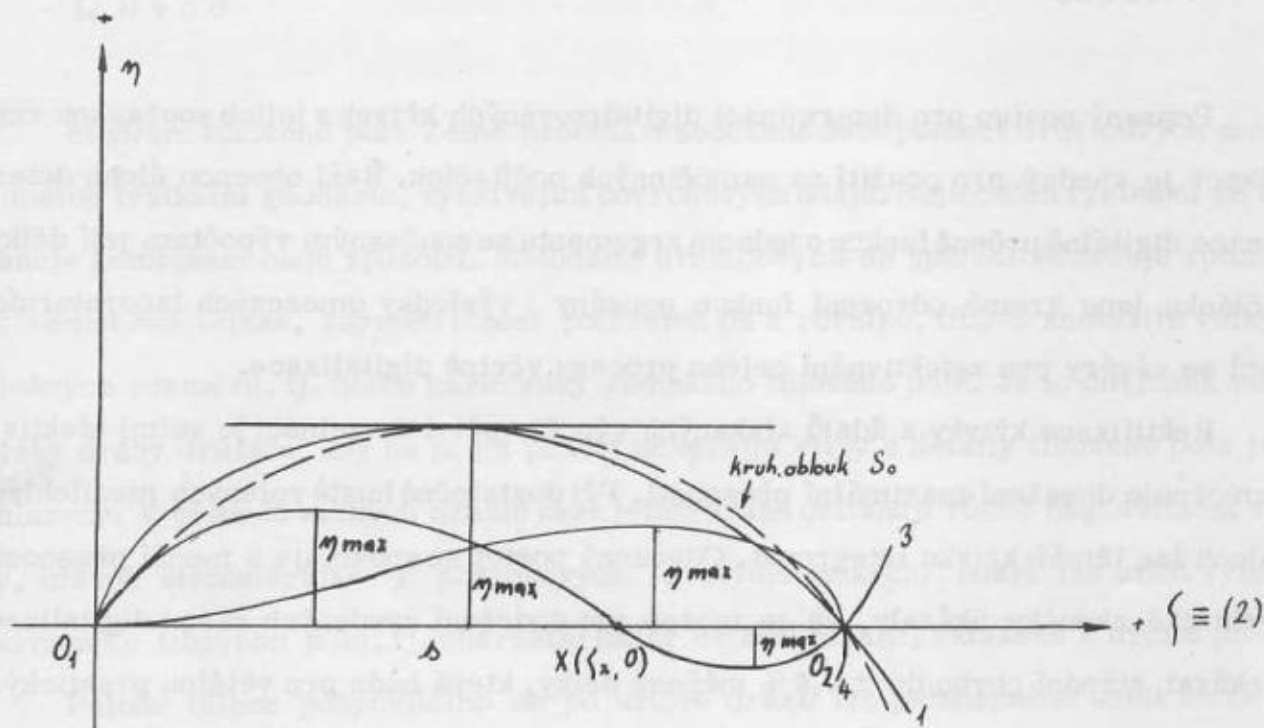
K úplnému dořešení problému zbývá určit zásady volby kroku mezilehlých bodů M_j . To bude záviset na požadované přesnosti determinace, vzdálenosti opěrných bodů, změně směru křivky vzhledem k osám a její poloze, křivosti křivky a jejích změnách a částečně na použitých výstupových zařízeních /účelu, ke kterému determinujeme/. V programu je volba kroku řešena obecně vstupním volitelným parametrem, a to buď konstantně nebo jako násobek /díl/ vzdálenosti opěrných bodů. Vzhledem k relativní rychlosti samočinných počítačů oproti "pomalým" výstupům není tento problém závažný a je možno krok zhustit bez ztráty efektivity výpočtu.

3. Rektifikace digitalizované křivky

Vzhledem k relativnímu nevyužití počítače /pomalé výstupy/ byla řešena otázka současného zpracování více programů s programem determinačním. Jako nejpotřeb-

nější se jeví výpočet délky křivky /např. komunikace/, výpočet plochy /kultury, vod/ a jiné kartometrické nebo generalizační výpočty. K programu byl připojen jako pod-systém rektifikační program. Případné další programy je možno časem postupně připojovat.

Odvozený algoritmus počítá délku křivky sumarizací délek jednotlivých úseků tak, že kubickou parabolou určenou aproximačním postupem /viz kapitola 3/ nahradí jedním nebo dvěma kruhovými oblouky. Mezi dvěma sousedními body mohou nastat tyto případy průběhu křivky /viz obr. 4/.



Obr. 4

Pro řešení úlohy musíme znát délku tětivy s , koncových bodů úseku a extrémní odchylku čáry od této tětivy, tj. η_{\max} , kterou zjistíme testem při determinaci ze vztahu (8). Současně testujeme znaménko souřadnice η a při jeho změně registrujeme alespoň přibližně i souřadnici ξ_x tohoto bodu / x viz obr. 4/. Je-li již dána délka tětivy / s / a rozpětí / η_{\max} /, lze velmi snadno křivku aproximovat kruhovým obloukem.

V případě inflexe nahradíme křivku dvěma oblouky. K výpočtu délky kruhového oblouku použijeme dvou přibližných vzorců

$$S'_0 \doteq \frac{1}{3} (8t_1 - s) \quad \text{kde} \quad t_1 = \sqrt{\frac{s^2}{4} - \eta_{\max}^2} \quad (11)$$

$$S_o'' \pm \sqrt{s^2 + \frac{16}{3} \eta^2_{\max}} \quad (12)$$

Přesnost lze kontrolovat testem na rozdíl obou vypočtených hodnot S_o' a S_o'' . Vypočítáme výslednou délku úseku ze vztahu

$$S_o = \frac{S_o' + S_o''}{2}$$

4. Závěr

Popsaný postup pro determinaci digitalizovaných křivek s jejich současnou rektifikací je vhodný pro použití na samočinných počítačích. Řeší obecnou úlohu determinace digitálně určené funkce o jednom argumentu se současným výpočtem její délky. V článku jsou kromě odvození funkce popsány i výsledky omezených laboratorních testů se závěry pro zefektivnění celého procesu včetně digitalizace.

Rektifikace křivky z údajů získaných výpočty při determinaci je velmi efektivní a umožňuje dosažení maximální přesnosti. Při dostatečně hustě volených mezilehlých bodech lze téměř křivku integrovat. Odvozený postup se spokojuje s menší přesností. Praktické zkoušky ukázaly, že je možno při dodržení uvedených zásad digitalizace očekávat střední chybu do $\pm 0,6\%$ měřené délky, která bude pro většinu praktických úloh jistě vyhovovat. Přesnost lze ovšem dále zvyšovat např. zhušťováním kroku nebo výpočtem oblouků mezilehlých místo opěrných bodů.

Uvedený postup může umožnit řešení řady taktických úloh na moderní výpočetní technice.

L I T E R A T U R A

[1] Rechentechnik - Daten Verarbeitung čis. 7/1970 /Werner Markvart/.

Došlo dne 11. 7. 1972.

Určení některých charakteristik vnějšího tíhového pole Země pro malé výšky nad Zemí

1. Úvod

Studium tíhového pole Země probíhá v současné době pomocí družicových metod a metod fyzikální geodézie, využívající povrchových údajů. Nejlepších výsledků se dosahuje kombinací obou způsobů. Metodami družicovými se spolehlivě určuje zploštění zemského tělesa, asymetričnost polárních os a rovníku, tíhové anomálie velkých plošných rozměrů, tj. nízké harmoniky zemského tíhového pole. Je to důsledek velké výšky dráhy družice, kdy na ni již působí integrální vlivy, a detaily tíhového pole jsou zhlazeny. V případě nízkých družic zase jejich dráhu ovlivňují různé negravitační vlivy, hlavně atmosférické. Z povrchových /gravimetrických/ údajů lze určit vysoké harmoniky tíhového pole, tj. charakteristiky detailů lokalit, vztažené k určité ploše.

Polohu tělesa pohybujícího se po určité dráze lze jednoznačně určit ze změn tíhového zrychlení, rozložených do tří souřadných os, orientovaných vzhledem k tížnici místa. K tomu však takové těleso musí mít navigační zařízení, v jehož paměti je uložen model tíhového pole podél vypočtené dráhy letu.

V článku jsou popsány možné způsoby výpočtu některých charakteristik tíhového pole z připravených povrchových tíhových údajů do výšky 300 km nad Zemí.

2. Funkce představující zkoumané charakteristiky

Hlavní význam mají tyto veličiny, známé z fyzikální geodézie:

- skutečná hodnota tíhového zrychlení g_p /v bodě P /
- tíhová anomálie Δg_p
- složky tížnicové odchylky ξ_p, η_p
- vzdálenosti ekvipotenciálních ploch.

Při modelování charakteristik tíhového pole se veličiny g_P, ξ_P, η_P nahrazují odvozenými údaji, vhodnými k balistickým výpočtům. Jsou to:

- tíhový poruchový vektor $\bar{\delta}$, udávající rozdíl velikosti vektorů \bar{g} skutečného pole a $\bar{\gamma}$ pole normálního

$$\bar{\delta} = \bar{g} - \bar{\gamma},$$

jehož složky ve sférických souřadnicích jsou:

δ_r , složka $\bar{\delta}$ v průvodiči r :

$$-\delta_r = \delta_g = g_P - \gamma_P = \Delta g + \frac{2G}{R} N;$$

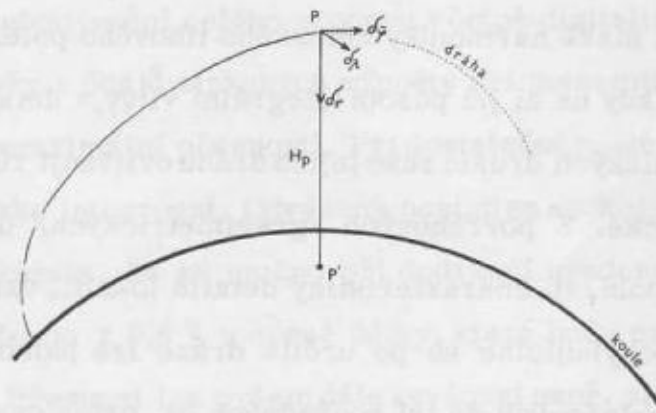
$$\delta_{\varphi} = -G_{\xi} \quad \text{je složka v meridiánu}$$

$$\delta_{\lambda} = -G_{\eta} \quad \text{je složka v 1. vertikálu, kde}$$

G - průměrná hodnota tíhového zrychlení na Zemi,

R - střední poloměr Země

N - výška geoidu.



Obr. 1. Dráha tělesa v rovině meridiánu / δ_r - rozdíl velikostí vektorů \bar{g} a $\bar{\gamma}$;
 $\delta_{\varphi}, \delta_{\lambda}$ - horizontální složky rozdílů obou vektorů/

Aby uvedené funkce mohly být počítány z povrchových údajů v bodě P nad Zemí, musí být funkcemi analytickými a harmonickými /blíže viz např. [1]/.

Všechny funkce jsou odvozeny z poruchového potencionálu τ , který je funkcí harmonickou /viz např. [2]/:

$$\tau = w - U \quad \text{kde } w \text{ - tíhový potenciál}$$

$$U \text{ - normální potenciál}$$

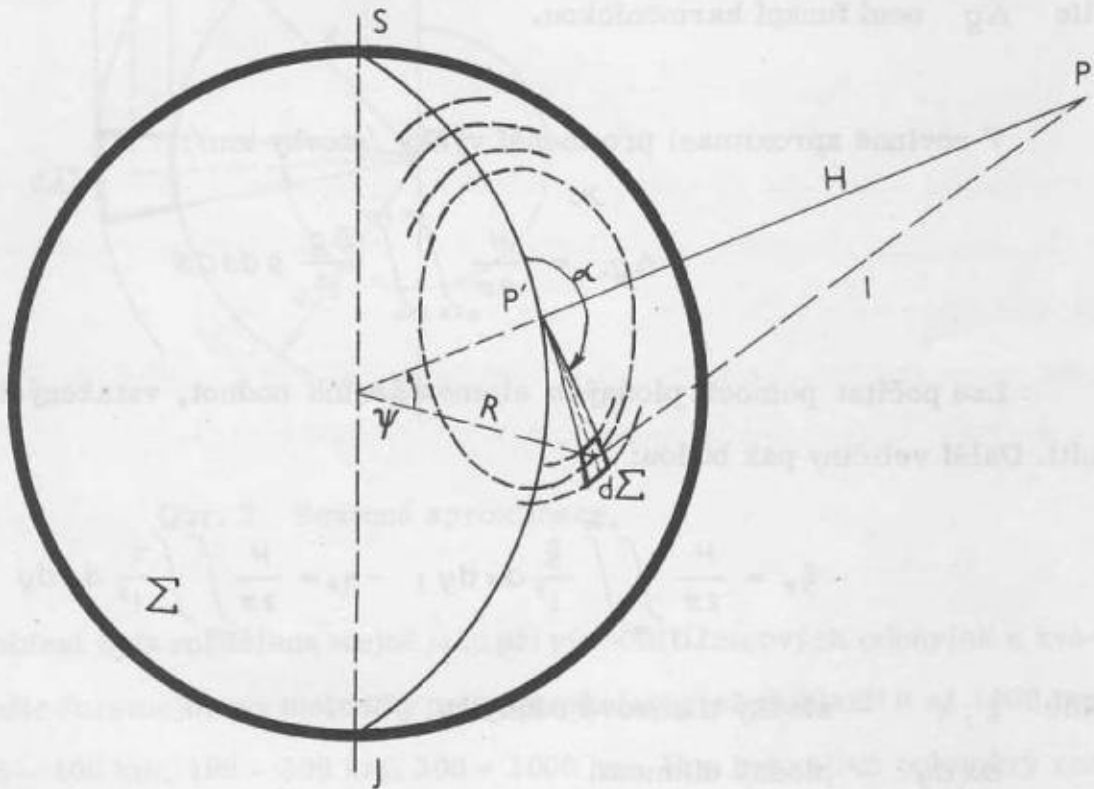
Složky tíhové poruchy $\bar{\delta}$ jsou přímo parciálními derivacemi harmonické funkce τ :

$$\delta\varphi = \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \delta\lambda = \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \delta r = \frac{\partial T}{\partial z}$$

a jsou tedy také funkcemi harmonickými.

3. Metody analytického pokračování harmonických funkcí tíhového pole Země do výšky H nad vztážnou plochu

Těmito metodami se již zabývalo mnoho autorů, např. v [3], [4], [5]. Jako nejvýhodnější a nejpřesnější se ukázalo použití Poissonova integrálu pro analytické pokračování harmonické funkce vzhůru [6]. Při geologické interpretaci anomálního tíhového pole je zmíněný integrál základem některých metodik výpočtů anomálních hustot v podloží [7]. Pro ilustraci jsou za harmonickou funkci δ dosazeny geodetické veličiny /jejich převod je snadný/:



Obr. 2. Vztážná plocha Σ s elementy pro výpočet Poissonova integrálu; povrchové hodnoty Δg jsou vztaženy k plošným elementům $d\Sigma$.

Tíhová anomálie v bodě P /sférická aproximace/:

$$\Delta g_P = \frac{R^2 (r^2 - R^2)}{4\pi r} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\psi} \frac{\Delta g}{l^3} \sin \psi d\psi d\alpha$$

kde H - výška bodu P nad Zemí

$$r = R + H$$

l - vzdálenost mezi bodem P a těžištěm plošného elementu na Zemi /tj. náhradní kouli/

ψ - sférická vzdálenost

α - azimut na plošný element $d\Sigma$

$$d\Sigma = R^2 \sin \psi d\psi d\alpha$$

Počítá se vlastně hodnota harmonické funkce $r \Delta g_P$, neboť samotná tíhová anomálie Δg není funkcí harmonickou.

V rovinné aproximaci pro menší výšky /stovky km/:

$$\Delta g_P = \frac{H}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{s=0}^{+\infty} \frac{\Delta g}{l^3} s ds d\alpha$$

Lze počítat pomocí plošných elementárních hodnot, vztažených ke čtvercové síti. Další veličiny pak budou:

$$-\xi_P = \frac{H}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{l^3} dx dy; \quad -\eta_P = \frac{H}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta}{l^3} dx dy$$

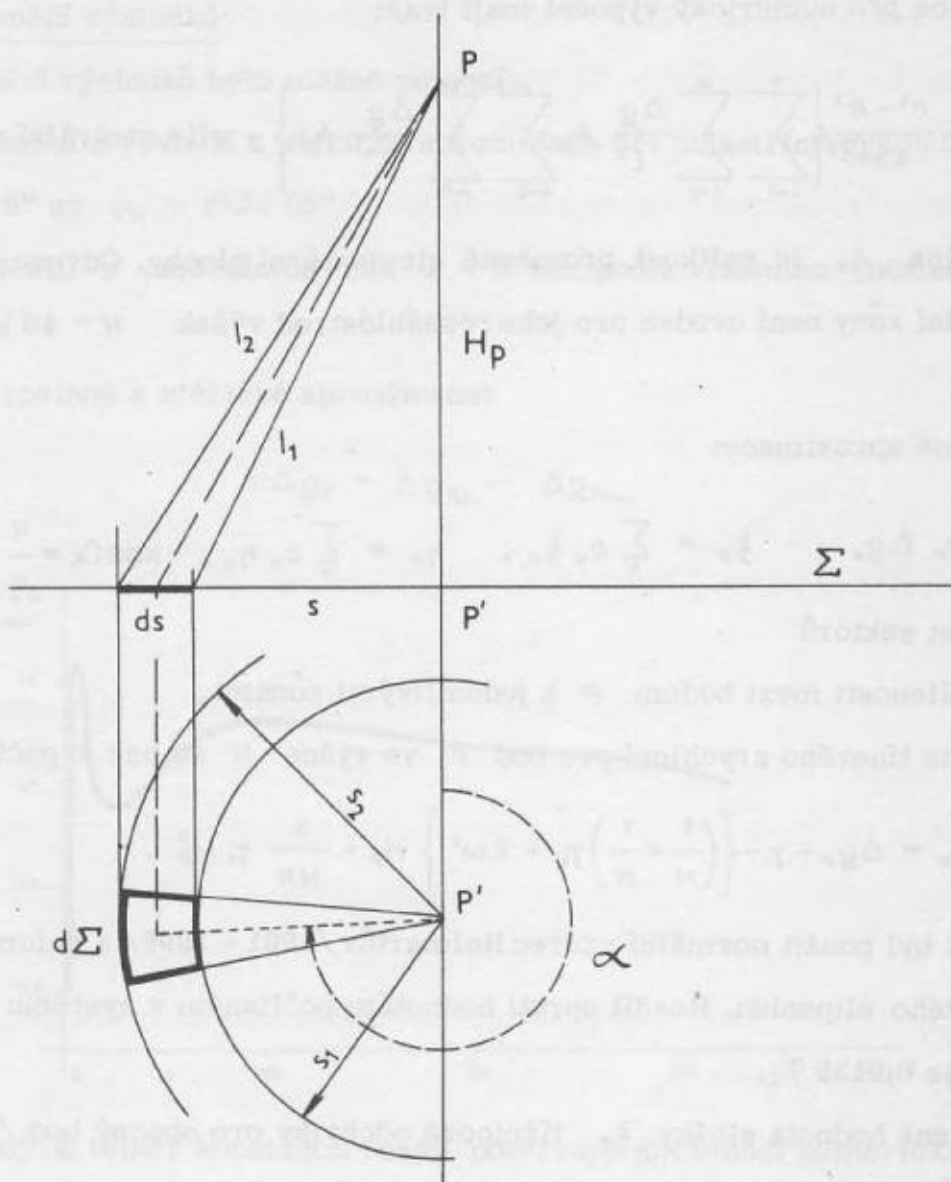
kde ξ, η - složky tížnicové odchylky

$dx dy$ - plošný element.

Velichiny $\Delta g, \xi, \eta$ na pravé straně rovnic jsou průměrné hodnoty pro elementární plochy.

4. Zkoušená numerická řešení

Vzhledem k tomu, že nejobtížnější je příprava údajů, tj. středních hodnot anomálií ve volném vzduchu Δg a složek ξ, η tížnicových odchylek pro plošné elementy, byl volen tento postup:



Obr. 3 Rovinná aproximace

1. Integrační oblast byla rozdělena stejně jako při výpočtu tížnicových odchylek a kvazigeoidu podle Jeremejevovy metodiky pro poloměr integrační oblasti 0 až 1000 km po zónách 5 - 100 km, 100 - 300 km, 300 - 1000 km. Pro jednotlivé poloměry zón byly vypočteny příslušné váhové funkce.
2. Pro centrální zónu 0 - 5 km byly odvozeny a vypočteny koeficienty podle výpočetního vzorce pro rovinu při $n = 5$ Gaussova způsobu numerické integrace.
3. Celý výpočet byl upraven pro počítač. Jako vstupních hodnot bylo použito hodnot Δg k výpočtům gravimetrických tížnicových odchylek a výšek kvazigeoidu na počítači.

Rovnice pro numerický výpočet mají tvar:

$$\Delta g_P = \frac{r^2 - R^2}{4\pi r} \left\{ \sum_{i=1}^8 \sum_{j=0}^{16} \frac{\Delta g}{l^3} A_q + \sum_{i=8}^{21} \sum_{j=0}^{24} \frac{\Delta g}{l^3} A_q \right\} + \text{vliv centrální zóny /do } i=1/.$$

Veličina A_q je velikost proměnné elementární plochy. Odvozený vzorec pro vliv centrální zóny není uveden pro jeho rozsáhlost; od výšek $H = 40$ km se nemusí uvažovat.

Rovinná aproximace:

$$\Delta g_P = \sum_k c_k \Delta g_k, \quad \xi_P = \sum_k c_k \xi_k, \quad \eta_P = \sum_k c_k \eta_k, \quad \text{kde } c_k = \frac{H}{n} \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right),$$

n - počet sektorů

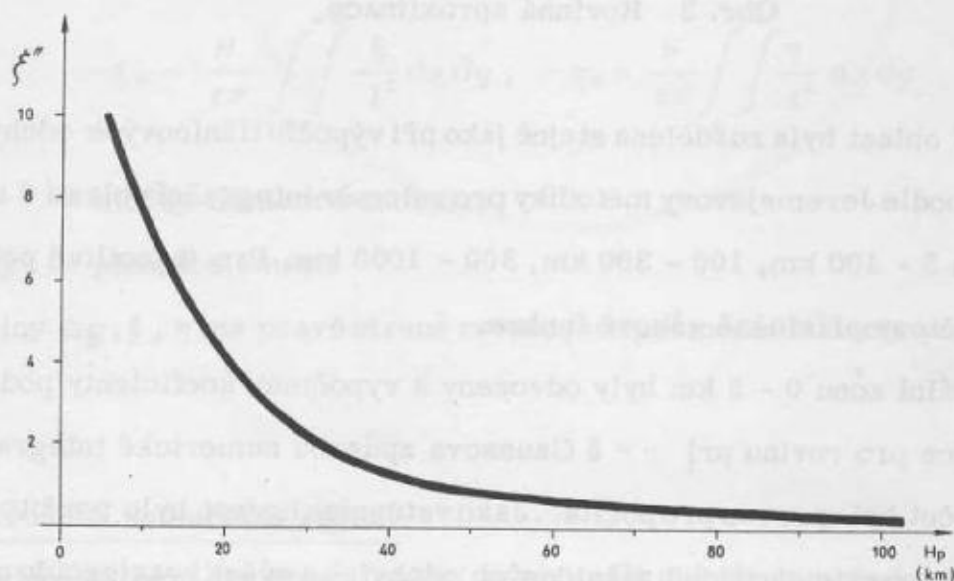
l_1, l_2 - vzdálenosti mezi bodem P a jednotlivými zónami.

Hodnota tíhového zrychlení pro bod P ve výšce H se pak vypočte:

$$g_P = \Delta g_P + \gamma_0 - \left\{ \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) \gamma_0 + 2\omega^2 \right\} H_P + \frac{3}{MN} \gamma_0 H_P^2.$$

Pro výpočet byl použit normální vzorec Helmertův /1901 - 1909/ a poloměry křivosti Krasovského elipsoidu. Rozdíl oproti hodnotám počítaným v systému 1967 /mezinárodním/ je 0,0135 ‰.

Byla vypočtena hodnota složky ξ_P tížnicové odchylky pro obecný bod / $B_0 = 50^\circ 15'$, $L_0 = 16^\circ 05'$ /. Výsledek je uveden graficky na obrázku č. 4.



Obr. 4 Průběh složky

5. Srovnání výsledků

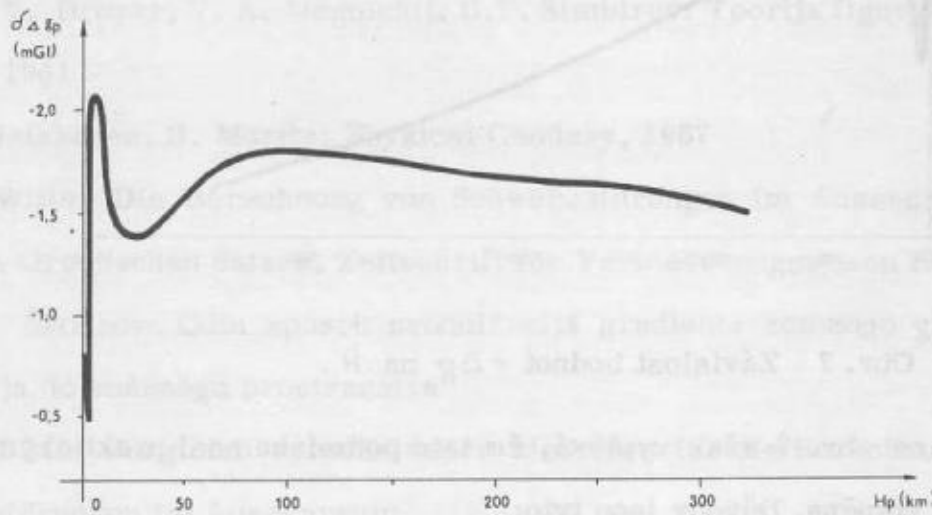
Porovnání výsledků bylo možné pomocí

a/ výsledků z rovinné a sférické aproximace při oblasti integrace 5 - 1000 km /tj. $\psi_1 = 3^{\circ}19''$ až $\psi_{21} = 8^{\circ}25'03''$ /,

b/ výsledků z centrálních zón 0 - 5 km podle vlastního odvození a výpočtů podle [8].

Rozdíl rovinné a sférické aproximace:

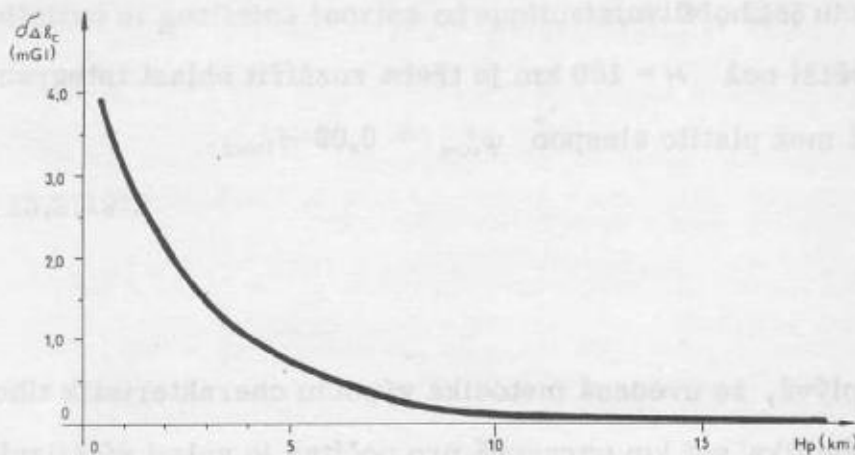
$$\delta \Delta g_p = \Delta g_{p_{sf.}} - \Delta g_{p_{rov.}}$$



Obr. 5. Malý a téměř konstantní rozdíl potvrzuje správnost numerického výpočtu.

Rozdíl centrálních zón 0 - 5 km:

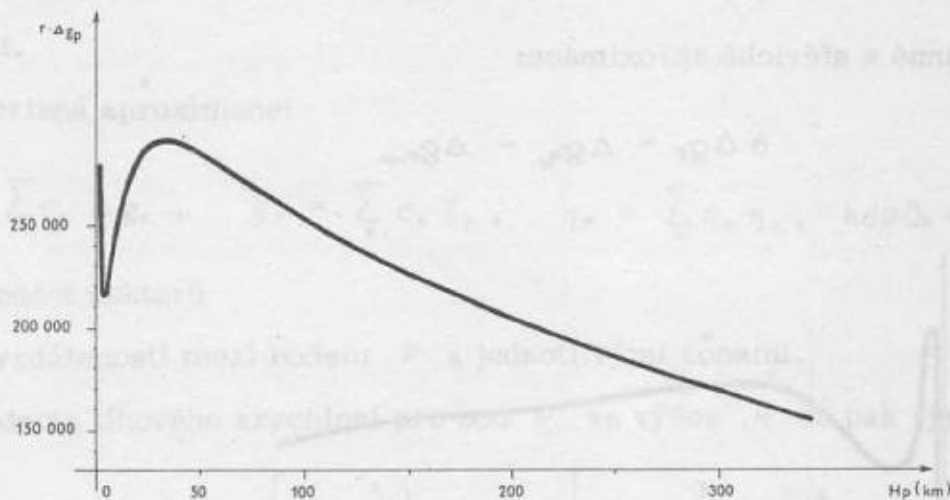
$$\delta \Delta g_c = \Delta g_c^I - \Delta g_c^{II}$$



Obr. 6. Rozdíl v nejbližším okolí způsobuje odlišný způsob výpočtu anomálií.

V [8] jsou tíhové anomálie vztaženy k nadmořské výšce průmětu bodu P do topografického reliéfu oproti anomáliím ve volném vzduchu, vztaženým k nulové hladinové ploše.

Podle jedné z vlastností harmonické funkce $r \Delta g$ má platit $\lim_{r \rightarrow \infty} r \Delta g = 0$. Skutečný vypočtený průběh je uveden na obr. 7.



Obr. 7 Závislost hodnot $r \Delta g$ na H .

Z grafu na obr. 7 však vyplývá, že tato podmínka není praktickým výpočtem do $H = 40$ km splněna. Důvody jsou tyto:

a/ povrchové hodnoty harmonické funkce nejsou vztaženy k tělesu, pro které jsou hodnoty $r \Delta g$ počítány. Splnění této podmínky by však vyžadovalo doplnění korekčních členů Moloděnského nebo přepočtení anomálií podle Bjerhammara;

b/ vliv centrální zóny je pro malé výšky H /řádově několika km/ poměrně velký; přesné vyhodnocení by vyžadovalo rozšíření oblasti centrální zóny při ponechání metodiky výpočtu jejího vlivu;

c/ pro výšky větší než $H = 100$ km je třeba rozšířit oblast integrace tak, aby pro vnější integrační mez platilo alespoň $\psi_{\min}^0 \cong 0,09 H_{(km)}$.

6. Z á v ě r

Z výsledků vyplývá, že uvedená metodika výpočtu charakteristik tíhového pole pro výšky řádově několika set km upravená pro počítač je velmi efektivní. Předpokladem je však vhodná příprava vstupních údajů. Použití této metodiky úzce souvisí

s výpočtem gravimetrických tížnicových odchylek a výšek kvazigeoidu, neboť všechny výpočty se dějí na základě stejných vstupních dat. Pro výšky H větší jak 40 km není nutno uvažovat odděleně vliv centrální zóny 0 - 5 km.

L I T E R A T U R A

- [1] M. Burša: Základy kosmické geodézie, díl II., Kosmická geodézie dynamická, MNO, Praha 1970
- [2] V. V. Brovar, V. A. Magnickij, B.P. Šimbirev: Teoriya figury Zemli, Moskva 1961
- [3] A. Heiskanen, H. Moritz: Physical Geodesy, 1967
- [4] B. Witte: Die Berechnung von Schwerestörungen im Aussenraum mit Hilfe des Greenschen Satzes, Zeitschrift für Vermessungswesen 1969, č. 4
- [5] V.G. Škodrov: Odin sposob prodolženija gradienta zemnogo gravitacionnogo polja do vněšněgo prostranstva
- [6] B. Witte: Vergleich verschiedener Methoden für die Berechnung von Schwerestörungen im Aussenraum
Schweitz. Zeitschrift für Verm., Photogram. und Kult., č. 7, 1969
- [7] K. Jung: Schwerkraftverfahren in der angewandten Geophysik, Leipzig 1961
- [8] C. Morelli, M.T. Carozzo: Calculation of the gravity gradient components and of gravity in elevation from gravity anomalies referred to the physical earth's surface
Bolletino di geofisica teorica ed applicata, č. 21, 1964

Došlo dne 15.2.1973

Ke koncepci leteckého měřického snímkování

Referát přednesen na fotogrammetrickém semináři VAAZ K 23

v Brně 18.–19. října 1972

Růst kvalitativních a kvantitativních požadavků na letecké měřické snímkování, omezující podmínky podnebí a počasí, charakter terénu i konkrétní možnosti technické, materiální a možnosti leteckého provozu nutí k tomu, aby snímkové lety byly co nejefektivnější a aby jejich výsledků bylo co nejefektivněji využito. S tímto požadavkem není v náležitém souladu dosavadní způsob leteckého měřického snímkování, neboť se snímkuje na základě nejrůznějších požadavků koordinovaných jen podle požadovaných typů fotogrammetrických snímacích komor a podle doby snímkování v závislosti na technických možnostech fotoletecké jednotky.

Současná koncepce leteckého měřického snímkování není nikde formulována. Vychází se převážně ze zásady: Snímkejme vše, co a jak si kdo přeje, pokud je to v našich silách a technických možnostech a pokud tím nevyzradíme utajované skutečnosti.

Uplatňování této zásady nás přivedlo k tomu, že se v současné době provádějí paralelně čtyři druhy leteckého měřického snímkování:

- snímkování pro obnovu topografických map v měřítku 1:25 000 až 1:37 000,
- snímkování pro topografické mapování v měřítku 1:12 000 až 1:18 000,
- snímkování pro technicko-hospodářské mapování v měřítku 1:4000 až 1:9000,
- snímkování pro speciální účely ve velkých měřítkách.

Tato snímkování jsou uskutečňována převážně podle přání a potřeb uživatelů. Proto prostor snímkování a jeho doba, ačkoliv jde o důležité prvky, mají v převážné míře nahodilý charakter. Jejich nahodilost zmírňujeme zatím jenom tím, že doporučujeme využívání stávajících archivovaných snímků, doporučujeme změny termínů, abychom mohli snímkování účelně sdružovat do jednotlivých prostorů a snímkových

letů. Usměrnujeme parametry snímků případ od případu, v závislosti na technických možnostech letadel a komor. Nahodilost snímkování dále prohlubuje počasí a v některých případech též kvalita a včasnost technického zabezpečení.

To jsou však okolnosti většinou známé. Jejich uvedením se jen připomíná a zdůrazňuje rozmanitost požadavků, podmínek a parametrů, mnohostrannost a roztržitost úsilí, které vyvolává dojem živelnosti a nedostatečné organizovanosti leteckého měřického snímkování. Není to tedy důsledek lajdáctví, nezodpovědnosti, neodborného provedení nebo nedostatku ochoty. Naopak, ochota, úsilí i kvalita výsledků jsou z mnoha míst pochvalně oceňovány. K nespokojenostem uživatelů však vede odkládání termínů snímkování, omezování jeho rozsahu, dlouhé a nespolehlivé dodací lhůty a malá pohotovost k nabídce dostatečně čerstvých snímků vhodných pro obvyklé měřické a interpretační účely. Naléhavost potřeby leteckých měřických snímků a poctivá snaha využít efektivních metod fotogrammetrie vyvolává zájem o zabezpečení leteckého měřického snímkování a snahu přispět k překonání jeho omezení a těžkostí.

Je mnoho těch, kteří budou ukazovat, že příčinou takového stavu jsou objektivní geografické, povětrnostní a technické podmínky. Je mnohem méně těch, kteří připustí, že vliv těchto objektivních podmínek a z něho plynoucí dojem živelnosti a nedostatečné organizovanosti lze překonat současnými silami a prostředky. Je to možné. Je k tomu však zapotřebí

- jasné a promyšlené koncepce leteckého měřického snímkování,
- zdokonalení organizace leteckého měřického snímkování,
- zdokonalení organizace využívání leteckých snímků.

Formulaci takové koncepce a potřebnému zdokonalení by musela předcházet poměrně rozsáhlá a odpovědná analýza dosavadního stavu leteckého snímkování, rozbor potřeb, zhodnocení dosavadních zkušeností, ujasnění prognóz pro další využití leteckých snímků ve fotogrammetrii i v dalších směrech jejich interpretace.

Všimněme si, jak řeší letecké snímkování nebo jakou koncepci leteckého měřického snímkování přijaly některé socialistické státy.

Např. v Maďarské lidové republice provádějí v zásadě dva druhy leteckého snímkování. Jednak periodické snímkování celého státního území v měřítku přibližně 1:12 000 normálními a širokoúhlými komorami formátu 18x18 cm. Celé státní území je snímkováno ve tříletých intervalech. Tohoto snímkování je používáno pro všechny

druhy topografického mapování ve středních a malých měřítkách. Druhým druhem snímkování je snímkování pro speciální účely technické ve zvlášť velkých měřítkách se snímkovým letem přizpůsobeným technickým požadavkům měřického díla, pro které jsou snímky jednorázově a jednoúčelově pořizovány.

V Německé demokratické republice je pro koncepci leteckého snímkování charakteristické to, že se pokoušejí využít jediného druhu leteckého snímkování k zabezpečení všech požadavků mapování topografického i hospodářsko-technického. Základním měřítkem snímkování by mělo být měřítko 1:9000, snímky formátu 23 x 23 cm. Ke snímkování celého státního území má docházet ve čtyřletých periodách. Měřítko 1:9000 má zabezpečit dostatek informací pro mapy celé škály měřítek od 1:2000 až pro měřítko 1:10 000, ze kterého mohou být odvozovány mapy měřítek menších. Letecké snímkování pro speciální technické účely by mělo být výjimkou a mělo by být řešeno případ od případu.

Koncepce leteckého snímkování v Sovětském svazu není známa. S ohledem na odlišné geografické podmínky a zejména na rozlehlost státního území bude asi jiná než v NDR a MLR. Naopak, koncepce NDR a MLR s ohledem na rozsah státního území a na podobné geografické podmínky se přibližuje potřebám našeho státu.

Koncepce leteckého měřického snímkování u nás by měla vycházet

- z vyhodnocení dosavadních vlastních zkušeností,
- ze zhodnocení podmínek geografických a meteorologických,
- z rozboru dosavadního a možného budoucího využití archivovaných leteckých snímků, zejména co do účelu, měřítka, požadavků na obsah a stáří leteckých snímků,
- z rozboru fotografické a měřické kvality dosavadních snímků,
- z rozboru potřeb předpokládaného rozvoje mapovacích a interpretačních prací a potřeb různých informačních systémů,
- z rozboru současného i budoucího potřebného stavu techniky a technologie fotolaboratorního, měřického i informačního zpracování leteckých snímků.

Ve formulaci koncepce leteckého měřického snímkování by pak měly být obsaženy zejména tyto charakteristiky leteckého snímkování:

- počet druhů leteckého snímkování, jejich účel a hlavní parametry,
- základní měřítko jednotlivých druhů leteckého snímkování s uvedením typů komor a formátů,

- stanovení rozsahu leteckého snímkování, zda jde o snímkování na ploše celého státního území nebo na některé jeho významné části nebo letecké snímkování speciální pouze pro daný případ,
- charakteristika periodičnosti leteckého snímkování,
- stanovení délky a charakteru jeho cyklu nebo vytýčení požadavku na jednorázové snímkování,
- stanovení základních parametrů objektivizovaného fotolaboratorního zpracování leteckých snímků,
- stanovení zásad a způsobů širokého využití leteckých snímků k různým účelům, zejména měřickým, mapovacím, interpretačním, dokumentačním, informačním aj.,
- základní ekonomické charakteristiky leteckého snímkování.

Je pochopitelné, že ze všech charakteristik by potom vyplývaly úvahy i odpovědi na řadu otázek rázu materiálního i organizačního. Závažné otázky perspektivního technického vybavení fotoletecké jednotky i dalších pracovišť by měly vycházet z celkové koncepce leteckého snímkování. Rovněž organizace měřického snímkování a jeho plánování by mělo být s touto koncepcí v souladu a mělo by zabezpečovat její uskutečňování.

Požadavek na formulování koncepce leteckého měřického snímkování byl vyslovován už před více než pěti léty. Zdá se, že koncepce by měla být uspokojivě vyřešena v průběhu asi dvou let. Těch uplynulých pět let však nebylo promarněno. Pozornost a úsilí pracovníků výzkumu, materiálně technického zabezpečení i provozních složek byla v této době orientována

- na zvýšení rozsahu leteckého snímkování, t.j. na zvýšení počtu leteckých snímků,
- na zvýšení spolehlivosti komor a fotolaboratorních zařízení a zčásti i na zvýšení jejich počtů,
- na komory s efektivnějšími parametry,
- na objektivizaci procesu snímkování i laboratorního zpracování leteckých snímků,
- na zabezpečení vysokého stupně kvality informací obsažených v leteckém snímku a na další zvýšení měřických kvalit snímku,
- na automatizaci zařízení pro snímkování za letu,
- na objektivizaci a automatizaci fotolaboratorních procesů,
- na objektivizaci a pokud možno automatizaci kvalitativních prověrek výsledků leteckého snímkování i fotolaboratorního zpracování leteckých snímků.

Svědčí o tom dosavadní výsledky výzkumu i některé kvalitativní i kvantitativní změny v technickém a technologickém vybavení.

Letecké snímkování v posledních pěti letech ukazuje i na určitou stabilizaci požadavků na letecké snímkování a dává možnost postihnout do jisté míry vývoj těchto požadavků a vyslovit prognózu rozsahu a některých parametrů leteckého snímkování na příštích 5 až 10 let.

Požadovaný rozsah leteckého měřického snímkování v posledních pěti letech je v celku vyrovnaný a s výjimkou roku 1970 se neliší od dlouhodobého průměru o více než 15 %. Podíl velkoměřítkového snímkování dosahuje v průměru asi 23 % všech snímků a pozvolna vzrůstá. Podíl maloměřítkového snímkování dosahuje v průměru asi 12 % všech snímků a pozvolna klesá. Rozhodující je podíl snímkování ve středních měřítkách, který dosahuje přibližně 65 % všech snímků a nahodile kolísá kolem průměru. Snímkování signalizovaných prostorů zahrnuje přibližně 25 % všech snímků a jeho podíl má vzrůstající tendenci. Přednáletová signalizace je uskutečňována nejen pro velkoměřítkové snímkování, ale i pro některá snímkování ve středním měřítku.

Zatím jen zběžné posouzení předpokládaných úkolů vede k domněnce, že do roku 1980 vzroste rozsah leteckého snímkování v porovnání se současným celoročním průměrným počtem snímků asi o 80 %, přičemž podíl velkoměřítkového snímkování vzroste asi na 45 % až 50 % celkového počtu snímků, podíl maloměřítkového snímkování klesne asi pod 5 % a podíl snímkování ve středních měřítkách bude kolísat kolem 50 %, podíl signalizovaných prostorů vzroste asi na 35 % celkového počtu snímků.

Kromě počtů snímků je třeba posoudit i plochu snímkaného území. Velkoměřítkové snímkování obsáhne ročně 3 - 4 % snímkané plochy a 40 - 50 % celkového počtu snímkaných lokalit o průměrné ploše asi 23 km². Celková plocha i počet lokalit velkoměřítkového snímkování mírně stoupá, plocha jednotlivých velkoměřítkových lokalit zůstává přibližně stejná.

Snímkování ve středním měřítku obsáhne ročně průměrně 35 % snímkané plochy a 50 - 60 % celkového počtu snímkaných lokalit o průměrné ploše asi 155 km². Celková plocha i počet lokalit snímkování ve středním měřítku mírně klesá, plocha jednotlivých lokalit vzrůstá.

Maloměřítkové snímkování se na celkové snímkané ploše podílí nejvíce, i když počet jeho lokalit je malý. Jednotlivé lokality zaujímají plochu několika tisíc km².

Celková plocha leteckého snímkování i počty lokalit, které se průměrně ročně snímají, kolísají nahodile kolem dlouhodobého průměru. Na jeden snímek velkého měřítka připadá přibližně 0,25 km², na jeden snímek středního měřítka přibližně 1,0 km² a na jeden snímek malého měřítka přibližně 10 km². Počty snímků v jednotlivých lokalitách jsou velmi různé: od 5 - 6 snímků až po několik set snímků.

Tyto údaje a jejich vztahy mohou přispět k vytvoření představy o složitosti současného i budoucího organizačního zabezpečení leteckého měřického snímkování a zčásti též o efektivnosti některých druhů snímkování.

V dosavadním snímkování a tím i v československé fotogrammetrii mají zatím rozhodující podíl snímky formátu 18 x 18 cm, kterých je více než 90 %, z toho je necelá čtvrtina širokoúhlých. Zbývajících méně než 10 % jsou snímky formátu 23 x 23 cm s konstantou komory 152 mm. Vzdělává počet snímků formátu 23 x 23 cm a počet snímků širokoúhlých. Vzhledem k předpokládané obměně fotogrammetrických přístrojů lze očekávat, že do roku 1980 se tento dosavadní poměr změní ve zcela opačný, že podíl snímků 18 x 18 cm klesne pod 10 %, že počet snímků formátu 23 x 23 cm vzroste nad 80 % a že dojde i k používání větších formátů, např. 30 x 30 cm.

Předpokládaný vývoj požadavků na letecké snímkování by měl vyvolat podrobnější ujasnění možností a potřeb zajištění úkolů, které z toho pro fotoleteckou jednotku i pro další pracoviště vyplývají, neboť stávající podmínky a pojetí snímkování nejsou s budoucími předpokládanými požadavky v náležitém souladu. Limitující podmínky povětrnostní, kádrové i technické si vynutí racionalizační opatření, která by měla vést, jak už bylo výše uvedeno,

- k jasné a promyšlené koncepci leteckého měřického snímkování,
- ke zdokonalení techniky, technologie a organizace leteckého měřického snímkování,
- ke zdokonalení organizace a zvýšení efektivnosti využívání leteckých snímků.

K tomu je žádoucí:

- seskupit požadavky na letecké měřické snímkování pro různé účely v závislosti na rozhodujících parametrech leteckého měřického snímkování /např. měřítko, formát, konstanta komory, roční doba snímkování apod./,
- sjednotit a stabilizovat tyto požadavky,
- normalizovat parametry leteckých měřických snímků,
- pro fotogrammetrické práce vyžadovat, pořizovat a užívat nadále jen snímky normalizované,

- zabezpečovat převahu víceúčelových snímkování,
- orientovat se na takový způsob snímkování, který si vyžádá jen minimum změn parametrů a termínů v průběhu sezóny,
- sezónu snímkování rozšířit do předjarního i podzimního období,
- stabilizovat plán leteckého snímkování periodizací některých jeho úkolů,
- zabezpečit fotoletecké jednotce takové technické a provozní podmínky, aby bylo možno zhotovit letecké snímky v potřebném počtu ve velmi krátkém období, daném stavem vegetace nebo i mimořádně nepříznivým počasím.

Lze se domnívat, že výše uvedené požadavky vyústí ve tři druhy leteckého měřického snímkování:

a/ v normalizované souvislé celostátní periodické snímkování v měřítku asi 1:12 000 pro topografické a lesnické mapování a pro řadu interpretačních účelů, které by zahrnovalo asi 45 % ročního počtu snímků,

b/ v normalizované nesouvislé neperiodické snímkování v měřítku asi 1:4000 pro technicko-hospodářské mapování, které by zahrnovalo rovněž asi 45 % ročního počtu snímků,

c/ ve snímkování pro speciální účely, uspokojující v nevyhnutelné míře požadavky, které přesahují možnosti snímků normalizovaných parametrů. Toto snímkování by zahrnovalo méně než 10 % ročního počtu snímků.

Tyto domněnky a názory možná podnítl fotogrammetry i letce k odporu, možná k souhlasu, možná i k přednesení dalších námětů. Měly by se projevit v odborné tvůrčí diskusi, pro kterou by na stránkách Vojenského topografického obzoru bylo jistě dosti místa.

Některé problémy se zhotovováním a použitelností fotomap

Referát přednesen na fotogrammetrickém semináři VAAZ K 23

v Brně 18.–19. října 1972

1. Ú v o d

Problematika zhotovování a použití fotomap se v posledních letech dostává do popředí zájmu zeměměřické veřejnosti i okruhu uživatelů kartografických podkladů. Tento příspěvek má posloužit k bližšímu naznačení některých problémů a zkušeností, vyplývajících ze zkoušek, které se v TS ČSLA v tomto oboru uskutečnily.

2. Metoda a základní pojmy

Fotomapa je mapa, jejíž jednu, a to hlavní část obsahu tvoří fotografický obraz převedený do měřické hodnoty ortogonálního průmětu terénu, a druhou částí je kartografická nadstavba, která může být volena v bohatším či chudším rejstříku barev, značek a doplňujících údajů.

Letecký snímek, zpracovaný klasickým překreslením, což je jedna z nejstarších metod fotogrammetrie, a upravený do rozměrů mapového listu, se nazývá fotoplán. Stejný výsledek pořízený diferenciálním překreslením se v odborné literatuře označuje jako ortofotoplán a to snad zejména proto, aby byla zvýrazněna ortogonalita získaného obrazu terénu, který svými výškovými poměry až dosud /bez použití diferenciálního překreslení/ nevyhovoval zpracování klasickým překreslením. Fotoplán doplněný kartografickou nadstavbou je nazýváán fotomapa. Analogicky některé odborné práce uvádějí u mapy pořízené na základě ortofotoplánu název ortofotomapa.

Podle názoru části odborníků není nezbytné tyto druhy rozlišovat, neboť výsledek je stejný, se srovnatelnými parametry a slůvko -mapa- obsažené v názvu samo

o sobě naznačuje ortogonalitu obou podkladů. Zdá se tedy vhodné používat jednotného názvu "fotomapa".

Nejužívanější metodou převedení obsahu snímku do ortogonálního zobrazení je diferenciální překreslování. Je to postupné perspektivní zobrazení snímkového obsahu po určitých plošných elementech. Zobrazení se děje spojitě, pohybem promítací štěrbin v pruzích na sebe bočně navazujících se současnou, rovněž spojitou změnou zvětšení promítaného obrazu v závislosti na převýšení středu plošného elementu. Celý proces je realizován na přístroji zvaném diferenciální překreslovač, který je řízen - právě pro posouzení převýšení onoho plošného elementu - univerzálním strojem ovládaným operátorem, nebo u novějších strojů speciálním řídicím zařízením, v jehož paměti jsou výškové poměry profilů uloženy.

Je tedy patrné, že ani diferenciální překreslení není zcela exaktní metodou a že v rámci promítaného plošného elementu zůstávají zbytkové chyby pramenící z centrální projekce.

Pro diferenciální překreslování lze používat přístroj Stereotrigomat vyrobený v závodech Zeiss Jena v NDR. Skládá se v podstatě z univerzálního přístroje prvního řádu a diferenciálního překreslovače; spojení obou je elektromechanické. Oproti jiným překreslovačům /např. ortoprojektoru GZ-1/ má tu vlastnost, že překreslení je prováděno přímo ze snímku, který tvoří součást stereoskopické dvojice. Přístroj má velmi univerzální charakter zejména co do možností nastavení konstanty komory, zvětšení převodů apod. U přístroje je ještě orografické zařízení, které při zapojení automaticky vyrývá do podložené rycí vrstvy šrafový výškopis. Profilové šrafy jsou znázorněním přechodu mezi výškovými vrstvami profilu při diferenciálním překreslování a to tím způsobem, že v rovině x, y znázorněný průběh profilu mění sílu čáry na rozhraní vrstev. Spojením bodů vyznačujících rozhraní vrstev je možno vyjádřit výškové poměry fotomapy ve vrstevnicích. Tím tato metoda skýtá možnost zpracovávat polohopis /fotografický ortogonální obraz/ i výškopis /v šrafové podobě/ jedním úkolem najednou. Pro tuto vlastnost je nazýváno zpracování snímků na sestavě univerzálního stroje s diferenciálním překreslovačem a orografickým zařízením integrovanou metodou.

3. Problematika fotografického polohopisu a použitelnost fotomap

Fotografie, tedy i letecký měřický snímek, je dílem okamžiku, výsledkem zobrazení fotografovaného předmětu v tom stadiu, v jakém se v době expozice nacházel, a to s celým svým okolím najednou. Zobrazuje tedy okamžitý stav terénu a byl-li pořízen nedávno, můžeme jeho obsah považovat za velmi čerstvou informaci o terénu, čerstvější než seberychleji zhotovená čarová mapa. Podaří-li se převést tento obraz terénu v obraz ortogonální - podobný mapě - získáváme velmi cenný doklad, tím cennější, čím více na čerstvost situace klademe důraz. Proto zejména ve vojenské praxi má fotoplán nebo fotomapa takový význam.

Převedení obecně orientovaného snímku do ortogonální polohy a určitého měřítka se již dnes nezdá být technickým problémem. Perspektivní přetvoření obrazu ať už vcelku nebo po částech je pomocí překreslovačů klasických nebo diferenciálních vyřešeno. Záleží už jen na tom, jak výsledný fotografický obraz vylepšit, či jak funkci přístrojů automatizovat nebo pomocí různých přídavných zařízení doplňovat o nové výrobní operace.

V důsledku neustálé lidské činnosti i působení přírodních vlivů však začíná každý snímek ihned po expozici zastarávat. Dá se říci, že stárne rychleji než čarová mapa, neboť v takovém množství informací, které snímek obnáší, dochází neustále ke změnám. Pouze díky tomu, že většina rychle se měnících skutečností /sezónní vegetace, obdělávání půdy, skladování, dopravní situace apod./ nejsou předmětem zájmu geodeta, nemá tato okolnost význačnější vliv na použitelnost snímku jako mapového obsahu. Naopak, jeho použití je výhodné, neboť umožňuje velmi rychle nahražovat zastaralou situaci novým zpracováním čerstvého snímku.

Fotografie je autentická podoba světa srozumitelná každému. To, že podoba je autentická, budí bezesporu důvěru a lidem, kteří se jinak /bez znalostí klíče smluvných značek/ těžko vyznají v mapě, dává fotomapa nebo jen pouhý letecký snímek mnohem lepší orientační možnosti. To, že obraz terénu je autentický, však nese s sebou i určité nedostatky. Autentičnost obrazu vylučuje jakoukoliv generalizaci a tak se zejména v malých měřítkách stává překážkou v použitelnosti pro účely interpretace.

Navíc ona autentičnost vylučuje jakékoliv významové uspořádání náplně obrazu a zobrazuje předměty pouze podle jejich vnějších znaků - velikosti, barvy a polohy. Tím se fotografie liší od jiných výsledků lidské činnosti zobrazujících terén. Topograf při mapování podle pevně stanovených regulí vynechává, generalizuje a určuje význam jednotlivých předmětů terénu.

Uvedením snímku do měřické hodnoty mapy a reprodukcí tohoto snímku však ještě mapu nezískáme. Fotomapa, aby mohla plně zastávat úlohu mapy, musí obvykle mít kromě kvalitního fotografického obrazu terénu ještě další náležitosti - významové určení prvků - bez kterého by se stala ne-li nepotřebnou, tak alespoň ne zcela samostatně použitelnou. Fotografický obraz musí být doplněn nadstavbou, která by pomocí kartografických prostředků určila význam podstatných předmětů a čar, popřípadě jejich hodnotu, název nebo druh.

Pro použitelnost fotomapy i pro možnost doplnit ji kartografickou nadstavbou je poměrně nejzávažnějším faktorem její měřítko. Velice často a zejména v oblasti vojenského využití se dostává do rozporu potřeba s použitelností fotomap. Pro území naší republiky a střeoevropský typ členitosti terénu a náplně map se jeví měřítko 1:25 000 jako krajní /minimální/ vzhledem k rozlišovací schopnosti. Naopak z hlediska potřeby armády je toto měřítko krajně velké. Mapy typické /co do měřítka/ pro činnost vojsk tedy nelze používat jako fotomapy.

S měřítkem souvisí vzhledem k rozlišovací schopnosti i potřeba kartografické nadstavby. Jestliže fotoplány velkých měřítek /1:5000 a větší/ se obejdou téměř bez nadstavby, pak se stoupajícím měřítkovým číslem stoupá i potřeba uvádět v nadstavbě více prvků potřebných pro čitelnost fotomapy. Se vzrůstajícím objemem kartografické nadstavby však roste i náročnost na její zhotovení a údržbu, a tím se ztrácí i časový a finanční efekt fotomap. Některé prameny uvádějí, že k pořízení fotomapy s malým objemem kartografické nadstavby je potřeba asi jedna třetina nákladů vzhledem k pořízení této mapy v čarové podobě. Volíme-li však nadstavbu bohatou, může se tento finanční efekt zcela ztratit.

Ke všem těmto okolnostem je třeba přihlížet při volbě obsahové náplně, měřítko a úpravy fotomap. Budoucí uživatelé posuzují jejich použitelnost z hlediska svých vlastních potřeb. Je pochopitelné, že podle počtu uživatelů roste i počet požadavků. Uplatnění požadavků všech budoucích uživatelů fotomap najednou do jednoho typu foto-

mapy s jednotnou kartografickou nadstavbou se jeví jako naprosto nemožné. Tyto okolnosti vedou výrobce k tomu, že se snaží v první řadě shromáždit všechny požadavky, zobecnit je a vytvořit základní typ fotomapy, který by v podstatě vyhovoval všem. Současně shromažďuje i účelově podobné skupiny požadavků a z nich vytváří podklady pro stanovení specifických nadstaveb nad tuto základní a vytváří tak fotomapu účelovou. Je pochopitelné, že v tomto procesu hrají roli i subjektivní názory tvůrců náplně při hodnocení požadavků.

4. Kvalita fotomap

Pro kvalitu základního obsahu fotografického obrazu je velmi podstatným ukazatelem polohopisná přesnost. Ta je ovlivněna zejména

- přesností snímkového podkladu
- přesností stroje /sestavy strojů/
- přesností vlícovacího bodového podkladu a jeho identifikace
- precizností práce operátora.

U přístrojů nejde jenom o konstrukční dokonalost a technický stav, ale i o možnost volby optimálního diferenciálního úseku překreslení - překreslovací štěrbinu. Je třeba volit takovou štěrbinu, aby při diferenciálním překreslování nezůstávaly zbytkové radiální posuny větší než je přípustné. Dále záleží i na tom, jak dalece dokáže operátor sledovat výškové změny v dráze štěrbinu na optickém modelu terénu měřickou značkou. Správná volba štěrbinu má i význam ekonomický, neboť zbytečně úzká štěrbinu značně prodlužuje dobu překreslení, aniž by podstatně zlepšila výsledek vzhledem k optimální volbě.

Lze očekávat, že střední polohová chyba fotomap se bude pohybovat okolo 0,4 - 0,5 mm v měřítku mapování. Je pochopitelné, že od středu snímků směrem ke krajům bude chyba pravděpodobnějsí a větší. Je nepříznivé, že se tato okolnost může projevit právě na stycích listů a vyvolat tím mylné představy o celkové nepřesnosti fotomap.

Rozhodujícím parametrem a podmínkou fotografické - tedy obrazové kvality fotomap, rozhodujícím dokonce o tom, zda je vůbec možno fotomapu vyrobit, je kvalita prvotního leteckého snímku. Je jasné, že to, co ještě stačilo v minulosti pro foto-

grammetrické vyhodnocení, pro tvorbu fotomap nestačí. Je potřeba stanovit nová kritéria pro použitelnost, tedy i pro únosnou úroveň snímků - zejména pro úroveň fotografického obrazu.

Kvalita snímků je závislá na mnoha činitelích. První skupinu tvoří geometrické vlastnosti snímku. Ty jsou dány stavem fotografického leteckého instrumentaria a péčí o něj. Jde především o kvalitní seřízení leteckých komor a znalost jejich vnitřní orientace a zkreslení. Potřebnou pozornost je nutno věnovat i mechanickým částím komor, neboť při převíjení a posunu filmu v kazetách může dojít k mechanickému poškození filmu, které není možno dalším zpracováním vyloučit, takže se stane vlastně součástí náplně mapového listu.

Další skupinou činitelů je kvalita fotografických materiálů a to jak podložek, tak i fotografických vrstev. Je jasné, že rozměrová stálost podložek je důležitou podmínkou, zejména proto, že při výrobě fotomap je hospodárné využívat pro zhotovení fotomapy jednoho snímku, tudíž pořídit ho v takovém měřítku, které by na něm umožnilo zobrazit území celého mapového listu.

Pro fotomapy 1:10 000 je nutno volit při formátu snímků 18 x 18 cm měřítko cca 1:36 000 až 1:40 000, pro formát snímků 23 x 23 cm cca 1:25 000 - 1:30 000. Znamená to tedy, že při zpracování je obraz snímku 2,5 - 4 x zvětšován a spolu s ním všechny jeho chyby.

Vlastnost fotografické emulze leteckých filmů a kvalita laboratorního zpracování jsou základními činiteli, vedle správné doby expozice při snímkování, ovlivňujícími fotografickou kvalitu obrazu. Těmto okolnostem je třeba věnovat zvláštní pozornost, neboť letecký snímek prochází při zpracování několika optickými zobrazeními, než přijde jako předloha pro zhotovení tiskového podkladu před fotoreprodukční přístroj. Základní kvalitativní vlastnost leteckých filmů je dána kvalitou fotografické vrstvy a podložky. I laboratorní práce však hrají podstatnou roli, neboť jejich vlivem je možno výsledek značně ovlivnit. Zejména čistota a preciznost těchto prací se jeví jako podstatná podmínka pro získání kvalitního výsledku.

Vedle fotografických kvalit ovlivňuje celkovou kvalitu i provedení snímkového letu. Je velmi potřebné zachovávat směrnáletové osy; to znamená, že každé vybočení přináší s sebou nutnost přijmout pro zhotovení fotomapy okrajové části snímku, které obvykle mívají menší fotografickou kvalitu. Je jasné, že pro fotomapy by bylo ideální

zhotovit zacílený měřický nálet. Tomuto jinak těžko splnitelnému požadavku se dá vyhovět snímkováním prostoru s 90% překrytem a vhodným výběrem pak určit snímek, který zobrazí celou plochu listu. Je tedy jasné, že požadavek dodržování požadovaného překrytu je zde opodstatněný.

Kvalitu fotografického obrazu může ovlivnit i volba denní a roční doby snímkování. Je všeobecně známo, že severozápadní osvětlení zprostředkovává dojem přirozené plasticity. Není možné, aby slunce osvětlovalo terén z této strany. Zbývá tedy volit mezi těmi směry osvětlení /při volbě doby snímkování/, které nejméně ruší plastický vjem. Některé prameny doporučují orientovat fotomapy na severní polokouli směrem k jihu. To však nepřichází pro naše mapy prozatím v úvahu. Je však možno volit jinou metodu, a sice využít osvětlení, které vrhá stíny směrem severovýchodním při orientaci mapy k severu. Pak by stačilo pořizovat snímky po 13.00 hodině, aniž by vznikl opačný plastický dojem vlivem osvětlení terénu.

Požadavky na kvalitu leteckých snímků lze shrnout do následujících zásad:

1. Snímky musí být kvalitní co do fotografického obrazu a musí splňovat tyto podmínky:
 - a/ aby zčernání fotografické vrstvy sousedních snímků bylo vzájemně tak podobné, aby montážní řezy při případné montáži nebyly vidět a vznikl homogenní dojem;
 - b/ aby stíny sousedních snímků dopadaly přibližně stejným směrem, čímž by nebyl rušen homogenní dojem;
 - c/ aby stíny padaly tak, aby přirozená plasticita výškových předmětů byla z fotomapy zřejmá a nevznikal snad dokonce opačný vjem;
 - d/ aby kontrast detailů nejmenších rozměrů zůstal zachován a mohl být jemným rastrem podán při tisku;
 - e/ aby rozdíl kontrastu ploch velkých rozměrů byl tak omezen, aby dodával mapovému listu homogenní tón;
 - f/ aby obraz snímku nebyl rušen mraky, jejich stíny, případně defekty vzniklými v emulzi při zpracování.
2. Snímky musí být přesné co do geometrických vlastností, neboť jsou většinou zpracovávány při současném několikanásobném zvětšení.

Ze zkušeností, které byly získány během zpracování fotomap lze konstatovat, že všechny tyto zásady je pro kvalitu fotomap bezpodmínečně nutno dodržovat. Ukáza-

lo se, že diferenciálním překreslením se kvalita původního leteckého negativu nepřenesou do výsledku - fotomapy - v plné míře, ale že se zhorší. Výsledky z negativů a diapositivů, připravovaných navyklým způsobem jako pro univerzální vyhodnocení, se ukázaly málo uspokojivé, neboť nesly stopy všech vlivů při zpracování. Bylo nutno zvýšit pozornost při manipulaci s těmito materiály a pozornost při laboratorním zpracování. Velmi závažnou okolností byl patrný úbytek světla směrem k okrajům snímků a tím rozdílnost kvality zobrazení středů a krajů fotomap. Elektronické vyrovnání obrazů se stalo pro tyto materiály naprostou nutností.

Zvláštní kapitolou by bylo hodnocení dosažené reprodukční schopnosti výsledných fotomap pro pořízení tiskových podkladů. Ukázalo se, že pouze snímky s optimálním rozdílem hustot a rozlišovací schopnosti jsou pro diferenciální překreslení vhodné, mají-li zajistit dobrou předlohu. Je tedy třeba zdůraznit, že vhodný pultónový materiál pro diferenciální překreslení je vedle kvalitního leteckého snímku základním předpokladem dobrého výsledku.

Je tedy mnoho činitelů, které kvalitu fotomap ovlivňují. Každá z těchto okolností, pokud působí negativně, vyvolává nedostatky patrné v konečném výsledku. Proto je metoda zhotovování fotomap velmi náročnou jak dodržením všech technických, technologických i materiálních podmínek výroby, tak z hlediska zručnosti a odborné vycvičenosti všech pracovníků, kteří se na výrobě podílejí.

5. Z á v ě r

Zkušenosti se zhotovováním fotomap v TS ČSLA, i když už dovolují formulovat určité technologické závěry a konkrétní požadavky na technické a materiální zabezpečení, nejsou ještě příliš rozsáhlé. Proto je této problematice věnována neustálá pozornost a je vyvíjena snaha po dalším vylepšení technologií, racionalizaci výroby a optimalizaci jednotlivých postupů. Metoda otevírá další možnosti automatizace fotogrammetrického mapování, využití progresivních materiálů, metod zpracování a zejména značného zrychlení a zlevnění mapovacích prací. I přes poměrně značnou omezenost na větší měřítká map se jistě stane fotomapa pro mnohé uživatele vítaným podkladem. Jde ještě o to, aby byly překonány zbytky nedůvěry v tento podklad a aby uživatelé našli jeho výhody a zvykli si plně jej využívat.

Současné problémy fotogrammetrického zhušťování

Referát přednesen na fotogrammetrickém semináři VAAZ K 23

v Brně 18.–19. října 1972

Zhušťování bodového pole snímkovými triangulacemi je stále velmi aktuální problematikou praktické fotogrammetrie ať už při mapovacích pracích různých měřítek, nebo při řešení různých speciálních úloh. V ČSSR se metody aerotriangulace pro určení vlíčovacích bodů doposud nejvíce používalo při fotogrammetrickém mapování topografických map v měř. 1:25 000 a 1:10 000 v letech 1953 - 1970. V menší míře se pak tyto metody používaly v inženýrské geodézii, především při projektování liniových staveb, přehrad a při některých dalších úkolech. Dá se říci, že aerotriangulace tak nahradila z velké části rozsáhlá polní geodetická měření, přispěla ke včasnému splnění úkolů a přinesla značné finanční úspory. Nejčastěji používanou metodou byla aerotriangulace na univerzálních vyhodnocovacích přístrojích I. řádu. V závěru mapování v měř. 1:10 000 byla pak v menší míře použita i metoda analytické aerotriangulace.

Podle klasické definice je úlohou aerotriangulace vytvořit pole vlíčovacích bodů, pokud možno s nejmenšími nároky na pozemní měření, které by umožnilo absolutní orientaci jednotlivých modelů pro jejich následující fotogrammetrické vyhodnocení. Tuto definici musíme dnes rozšířit v tom směru, že úloha aerotriangulace spočívá i v numerickém určování souřadnic bodových polí, které bezprostředně slouží geodetickým účelům a nemusí být ani využívány pro další fotogrammetrické vyhodnocování; např. zhušťování bodů katastrálních, náhrada bodů pozemní polygonizace, měřické body při stavbách, při stavbě komunikací apod. Možnost numerického určování souřadnic pozemních bodů fotogrammetrickými metodami s požadovanou přesností má zvláštní význam i pro armádu především v polních podmínkách k zabezpečení její bojové činnosti.

Aerotriangulace dosáhla v posledních letech vyššího stupně využití, dokonalosti a přesnosti především zásluhou výpočetní techniky a nových konstrukčně jednodušších měřických zařízení. Dnes, když se ohlédneme zpět po vývoji analogové fotogrammetrie a zvláště pak fotogrammetrickém zhušťování, a srovnáme možnosti a výsledky analogového a numerického řešení, musíme uznat, že analogová éra fotogrammetrie /alespoň pro obsáhlejší a náročnější práce/ i v oblasti fotogrammetrického zhušťování skončila. Skončila tak, že se analogové vyhodnocovací přístroje dostaly do takového stupně vývoje, že další zvyšování jejich přesnosti není myslitelné. Technické prostředky, které by vylepšovaly přesnost sestavení jednotlivých součástí, jsou zároveň omezeny tím, že udržovat dosaženou vysokou přesnost z fyzikálních důvodů působí nepřekonatelné potíže. Není dost možné vyrobit opticko-mechanické zařízení, které má pracovat s přesností několika mikrometrů, aniž se staráme o to, zda je možné fyzikálně takový stav udržet. Z těchto důvodů můžeme říci, že při přesnosti vyhodnocování

$$m_{xy} = \pm 0,01 \text{ mm /v měř. snímku/}$$

$$m_z = \pm 0,07 \%$$

bylo prakticky dosaženo u vyhodnocovacích přístrojů hranice technických možností. Tento závěr potvrzuje i ta skutečnost, že zbytkové chyby po opticko-mechanické korekci systematických snímkových chyb, prováděné při klasickém vyhodnocování a zbylé nepravidelné snímkové chyby jsou řádově stejné, nebo i vyšší než uvedené chyby strojové. Početní vyhodnocování leteckých snímků /analytická fotogrammetrie/ umožňuje zvýšení přesnosti vyhodnocení mimo jiné i vyloučením systematických snímkových chyb a z části i chyb nahodilých. Možnost ještě vyšší eliminace snímkových chyb dává mřížková komora, kdy se současně na snímku zobrazí přesně kalibrovaná mřížka a její proměření umožňuje početně eliminovat i místní nahodilé deformace.

Analytická fotogrammetrie již dnes dává fotogrametrii nové perspektivy vývoje a budoucnost to jistě potvrdí. Již dnes se používá fotogrammetrie v celé řadě oblastí, kde nebylo možné klasickou fotogrametrii použít buď pro malou hospodárnost nebo pro malou přesnost. Zatím nejširší uplatnění analytické fotogrammetrie je při zhušťování bodového pole numerickými metodami /analytická aerotriangulace/ a začíná se uplatňovat i při podrobném vyhodnocování v tzv. digitalizaci.

Pro zhušťování bodového pole analytickou aerotriangulací /AAT/ byly během

uplynulých 15 let vyvinuty ve světě různé teoretické i praktické metody. Podstatou těchto metod je matematické řešení vztahů mezi snímkovými a geodetickými terénními souřadnicemi. Tyto vztahy nejsou lineární a jejich řešení je poměrně náročné. Uvedený problém je možno řešit v podstatě dvěma způsoby:

a/ komplexním řešením všech vztahů

b/ postupným řešením dílčích etap.

Pro komplexní řešení v případě většího bloku je však zapotřebí velmi výkonného počítače. Metody postupného řešení /etapové/ v podstatě napodobují aerotriangulaci na univerzálních strojích a k jejich řešení stačí i menší počítač. U všech zpracovaných metod jde o způsob měření snímkových souřadnic, opravy snímkových souřadnic, matematické řešení vzájemné orientace, výpočet modelových souřadnic, transformace prostorových modelových souřadnic do geodetického systému, způsoby vyrovnání a určení přesnosti. Jednotlivé metody a to jak komplexní tak také etapové se navzájem liší použitými základními vztahy /vztah jednosnímkový a dvousnímkový/, komplexností řešení, způsobem řešení velkých soustav rovnic, způsobem vyrovnání atd.

Podle dostupných pramenů se dnes ve světě používá několika desítek různých metod, které řeší zhušťování jak v řadě tak v bloku.

Z toho by se dalo usoudit, že teoreticky má již dnes výkonný pracovník možnost zvolit si z mnoha uveřejněných způsobů ten, který jeho podmínkám a možnostem nejlépe vyhovuje. V praxi je však situace jiná. Tyto nové metody, které řeší zhušťování bodového pole exaktně, bez přiblížení, vyžadují přesnější měření vstupních údajů, to znamená novou přístrojovou základnu a poměrně výkonný samočinný počítač. Přes stále se rozšiřující použití AAT pro budování podrobných bodových polí, je vybavení provozů měřickou technikou, způsobem zpracování dat, použité metodiky, způsobem sestavování programů, použitím programovacího jazyka a typem počítače tak různorodé, že často prakticky není možná spolupráce ani mezi jednotlivými fotogrammetrickými provozy. Hospodářská integrace a mezinárodní vědecká spolupráce vyžaduje i v tomto směru normalizaci.

Jako vstupní údaje pro výpočet analytické aerotriangulace se používají snímkové rovinné souřadnice. Snímky se proměřují na přístrojích typu komparátor a to buď na stereo nebo na monokomparátoru. Tyto přístroje vyrobené pro účely AAT umožňují

určit vstupní údaje s podstatně vyšší přesností, než je tomu u univerzálních přístrojů /nejméně o jeden řád/.

Vzhledem k dalekosáhlé přizpůsobivosti početního vyhodnocování je tvar výchozích hodnot podřadný. Do výpočtu mohou být zavedeny rovinné souřadnice bodů na obou snímcích x' , y' , x'' , y'' , nebo snímkové souřadnice x' , y' , p , q nebo i polární souřadnice r' , α' , r'' , α'' . Použití polárních souřadnic však z hlediska přesnosti předem vylučujeme, protože zatím neexistuje polární komparátor, případně radiální triangulátor, který by měřil úhly s přesností $\pm 15''$ pro rozměr snímku 18×18 cm, nebo $\pm 10''$ pro rozměr snímku 23×23 cm, t.j. aby přesnost odpovídala prvním dvěma možnostem.

Mimo stereoskopická proměřování snímků na přesných stereokomparátorech lze získat rovinné snímkové souřadnice rovněž jednosnímkovým měřením na monokomparátoru. Jednosnímkový komparátor se samozřejmě nevyrovná stereokomparátoru při měření nesignalizovaných a neoznačovaných bodů pro malou přesnost identifikace těchto bodů. Jestliže jsou však body předem signalizovány, nebo vyznačeny pomocí přenosového a značkovacího přístroje, potom měření na monokomparátoru je vysoce přesné. Měřicí přístroje pro AAT mají mít nejméně takovou přesnost k určení souřadnic a paralax, aby byla vyšší než je střední nepravidelná zbytková snímková chyba, která činí podle posledních výzkumů asi $\pm 3 \mu\text{m}$. Přístroje vyrobené speciálně pro účely AAT tyto podmínky splňují. V konstrukci komparátorů rozeznáváme v podstatě dva typy přístrojů:

1. přístroje založené na Pulfrichově komparačním principu
2. přístroje založené na Abbého komparačním principu

U obou systémů existuje celá řada přístrojů s různými obměnami. Typickým přístrojem založeným na Pulfrichově principu je STEKOMETR a na Abbého principu ASKOREKORD, oba přístroje vyrábí VEB Zeiss Jena. Oba typy jsou v ČSSR v omezené míře používány pro AAT. Řada civilních provozů se snaží používat pro AAT STK 18×18 , který však není k danému účelu plně vyhovující a špatné výsledky často odrazují od používání AAT v praxi.

Podstata analytického vyhodnocování leteckých snímků spočívá v tom, že rovinné snímkové souřadnice terénních bodů, které jsou zobrazeny nejméně na dvou sousedních snímcích, jsou transformovány v prostorové souřadnice matematickým pře-

tvořením /matematickou projekcí/. Při tom se jedná o transformaci ze dvou nebo více souřadnicových systémů do jediného - do státního souřadnicového systému. V uplynulých letech byla v různých státech publikována celá řada postupů k vyřešení tohoto úkolu a je dosti obtížné rozeznat přednosti, případně nedostatky jednotlivých řešení. Jednotlivé metody a postupy řešení prodělaly rovněž svůj vývoj. Měnily se jednak na základě získaných zkušeností, vývoje měřicí techniky a především však na základě vývoje výpočetní techniky. Velmi známé jsou např. metody Schuta, Lobanova, Rinne-
ra a řady dalších autorů.

V ČSSR byly zpracovány, teoreticky zdůvodněny a do praxe zavedeny dvě metody s odlišnou matematickou formulací a to metoda Tomsova a metoda VAAZ.

Tomsova metoda byla zpracována za působnosti autora ve VÚGTK v letech 1958 - 62 pro zhušťování bodového pole v jednotlivých snímkových řadách, později upravena i pro možnost zhušťování v bloku. Výpočetní program byl zpracován pro počítač ODRA 1003, měření snímkových souřadnic předpokládá na stereokomparátoru. Dosahované výsledky co do přesnosti, tak jak je uvádí autor, jsou poněkud nižší. Na zkušebním bloku bylo dosaženo polohové chyby $m_p = \pm 15$ cm, což převedeno do měřítká použitých snímků 1:8000 odpovídá 20 mikrometrům. Metoda byla a doposud je v praxi používána v civilní službě, převážně u Státních lesů.

Metoda VAAZ, tzv. metoda spojených transformací, byla již původně zpracována pro možnost zhušťování jak v řadě, tak především v bloku. Tato metoda byla používána u VTOPÚ při dokončování mapového díla v měř. 1:10 000 v letech 1968-1969. Přesnost této metody je poněkud vyšší, na praktickém řešení několika bloků byla dosahována polohová chyba $m_p = \pm 10$ cm. Jedná se o typickou metodu prostorového modelového vyrovnání v systému spojených podobnostních transformací o 7 parametrech. Modelové souřadnice jsou odvozovány v jednotlivých řadách běžnou řadovou AAT s postupným řešením vzájemné orientace snímkových dvojic a jejich měřítkovým připojováním. Podmínkou následujícího blokového vyrovnání odvozených modelových souřadnic je souřadnicový soulad modelů na geodetických i stykových bodech.

Charakteristická pro metodu je formulace redukující počet neznámých, kterými jsou jen transformační parametry. Neznámé souřadnice stykových bodů jsou obecně ze soustavy vyloučeny. Normální rovnice jsou sestavovány přímo z dílčích rovnic oprav. Využívá se při tom standardního tvaru matice normálních rovnic a nulová po-

le se v paměti počítače neuchovávají. K řešení soustavy normálních rovnic se užívá nepřímé metody Gauss-Seidelovy skupinové iterace. Skupina vylučovaných neznámých je určena tak, aby odpovídala tvaru matice normálních rovnic. V tomto případě je skupina volena vždy pro neznámé parametry celé snímkové řady. Konvergence iteračního postupu je pak velmi příznivá.

Úloha byla naprogramována na počítač MINSK-22. Jako vstupní údaje jsou měřené snímkové souřadnice buď na stereokomparátoru nebo monokomparátoru. Před vlastním výpočtem jsou zaváděny matematicky opravy snímkových souřadnic a to ze srážky filmového materiálu kolineární transformací, opravy ze zakřivení Země a z refrakce.

Metoda VAAZ došla i mezinárodního uznání. Byla vybrána jako jedna z metod na výpočty mezinárodního testu blokové analytické aerotriangulace organizovaném III. komisí mezinárodní fotogrammetrické společnosti. Poměrně rozsáhlé výpočty na tomto testu byly prováděny ve výpočetním středisku VAAZ, jejichž podkladem byly fiktivní snímkové souřadnice terénních bodů, dodaných III. komisí mezinárodní fotogrammetrické společnosti. Je jenom škoda, že výpočty nebyly dovedeny až do konce a že výsledky nepřispěly tak, jak se počítalo, k širšímu uznání metody a ke zdůvodnění případného použití i pro extrémně náročné práce. Především z toho hlediska, že ještě doposud není v ČSSR zcela jednotný názor o vhodnosti použití AAT pro extrémně náročné práce na přesnost, jako je např. velkoměřítkové mapování, nahrazení některých geodetických prací pro číselné určování souřadnic apod. Chybí rovněž solidní rozbor používaných metod a to jak z hlediska technologie, tzn. např. nutná přesnost vstupních údajů, počet a způsob rozložení pevných bodů, vhodný počet modelů v řadě, počet řad v bloku, tak také z hlediska ekonomického. K tomuto účelu by bylo potřebné pokračovat ve výpočtu testů, provést řadu výpočtů na vhodně zvoleném matematickém modelu a jeho ovlivňování zaváděním chyb, které se mohou v praxi vyskytnout. /Exaktnost matematického řešení geometrických prostorových vztahů při AAT prakticky vylučuje působení dalších chybových vlivů jako je tomu u přístrojové triangulace/. Tímto způsobem by bylo možno dokázat vliv nahodilých chyb na konečnou přesnost, tak také systematických chyb. Na základě požadované přesnosti zhuštění by bylo možno stanovit pro praktickou aplikaci dodržování určených podmínek. Na VAAZ se pro příští období plánuje další ověření metody VAAZ výpočtem souřadnic terénních bodů na cvičném

bodovém poli. Rovněž se počítá s podrobnějším rozbořením této metody, jejích jednotlivých dílčích etap a možností zavedení úprav. Zdá se, že některé dílčí části, jako např. použitý způsob vyrovnávání a některé jiné části, nejsou řešeny optimálně. V této souvislosti bude také vhodné přepracovat program na jiný perspektivní počítač.

Jak ukazují dosavadní výsledky a zkušenosti z používání metod AAT, dá se počítat, že se vzrůstajícím počtem samočinných počítačů bude se rozšiřovat i využívání AAT.

V ČSSR je však využívání AAT zatím nedostačující. I když se v poslední době již převážně podařilo přesvědčit odpovědné pracovníky o vhodnosti této metody pro velkoměřítkové mapování, kdy dosahované výsledky co do přesnosti i ekonomických nákladů jsou jednoznačně pozitivní, existuje značná nedůvěra v používání AAT k nahrazení polních geodetických měření pro určování souřadnic bodů.

Jestliže hovoříme o možnosti širšího uplatnění fotogrammetrie pro potřeby armády, o možnosti nahrazení některých geodetických prací početní aerotriangulací, všimněme si blíže, jaké možnosti dává pro tyto účely AAT z hlediska přesnosti.

Bylo by možné uvést zkušenosti a poznatky různých autorů. Zaměřme se však konkrétně na metodu VAAZ, neboť ta má pro naše podmínky největší význam i možnost uplatnění v praxi.

Budou zde uvedeny některé dílčí výsledky této metody co se týká přesnosti /podrobný rozbor chybí/ a to jednak na základě některých zkušebních výpočtů na VAAZ a praktických výpočtů a zkušeností provozu Pardubice při velkoměřítkovém mapování.

Na VAAZ byly počítány některé testy určené III. komisí mezinárodní fotogrammetrické společnosti na bloku 120x160 km pro nálet s 30% bočním překrytem, tj. 5 řad po 20 snímcích. Byly to testy, které měly ukázat vhodnost metody pro mapování v malých měřítkách a určování souřadnic bodů ze snímků malých měřítek /měřítko snímku bylo přibližně 1:73 000/.

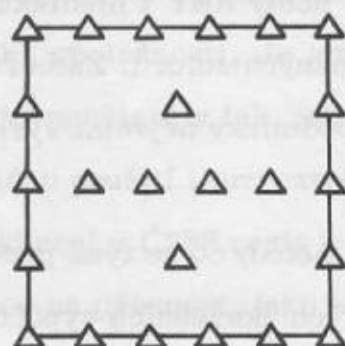
V každém snímku bylo bráno do výpočtu vždy 15 bodů, z nichž 9 leželo v podélném překrytu sousedních snímků. Celkový počet použitých terénních bodů v celém bloku byl 492.

Vlastní blokové vyrovnání proběhlo v několika variantách, které si lišily kvalitou zadaných snímkových souřadnic a rozdílným geodetickým zajištěním. Jednotlivé varianty výpočtu vycházely jednak z ideálních snímkových souřadnic, jednak ze sou-

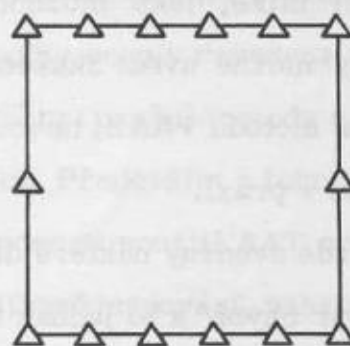
řadnic deformovaných, zavedením nahodilých i systematických chyb, které odpovídaly skutečným snímkovým chybám. Jelikož se jednalo o snímky s velmi malým měřítkem, nedá se plně posoudit dosáhnutá přesnost. Některé výsledky z těchto výpočtů jsou uvedeny v následující tabulce:

souřadnice	geodetické zajištění	jednotkové chyby vyrovnání v m				střední chyby zhuštění v m		
		m_o	m_{ox}	m_{oy}	m_{oz}	m_x	m_y	m_z
ideální	max	$\pm 0,11$	$\pm 0,10$	$\pm 0,09$	$\pm 0,13$	$\pm 0,13$	$\pm 0,11$	$\pm 0,68$
se zavedením system. chyb - "-	max	$\pm 0,46$	$\pm 0,57$	$\pm 0,28$	$\pm 0,48$	$\pm 0,80$	$\pm 0,61$	$\pm 0,97$
	min	$\pm 0,44$	$\pm 0,55$	$\pm 0,21$	$\pm 1,20$	$\pm 1,20$	$\pm 0,75$	$\pm 1,03$

max.



min.



Z praktických výsledků při velkoměřítkovém mapování uvedme jen některé závěry rozboru přesnosti této metody provedené ing. Mandysem. Rozbor byl proveden na základě praktického zhušťování ve 3 různě členitých lokalitách s různým geodetickým zajištěním /nešlo však o zkušební test, kdy poloha daných bodů je volena, ale byly použity pevné body tak, jak byly v terénu/. Pro kontrolu byla část zhušťovaných bodů kontrolně geodeticky zaměřena protínáním vpřed, rajonem nebo polyg. pořadem. Za předpokladu, že geodeticky určené body jsou bez chyb /čemuž pochopitelně tak není/ byly počítány přední polohové chyby

$$m_p = \pm \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$$

Výsledky byly až překvapivě dobré. Střední chyba v poloze bodů byla u všech lokalit nejvíce $m_p = \pm /6-8/$ cm, což odpovídá při použitém měřítku snímků 1:8500 $/7-10/ \mu m$ v měřítku snímku. Kdyby byly uvažovány možné chyby v poloze kontrolovaných bodů, mohly být výsledky ještě lepší. Střední chyba v určení výšky byla zhruba dvojnásobná.

Na základě uvedených poznatků nelze stanovit absolutní přesnost dané metody, nelze ani jednoznačně zdůvodnit vhodnost jejího použití pro některé zvlášť extrémně náročné práce na přesnost, především ve výšce. K tomu by bylo zapotřebí daleko obsáhlejších kontrolních výpočtů všech možných variant geodetického zajištění, velikosti a tvaru bloku apod. Uvedené praktické poznatky nebudou však pravděpodobně nadsazené; zahraniční prameny udávají u různých metod ještě vyšší přesnost v poloze $/4-6/ \mu m$ v měřítku snímku. Tyto praktické poznatky mohou být však dostačující k vyslovení závěru, že tato metoda je vhodná alespoň pro polohové zhušťování při velkoměřítkovém mapování /směrnice uvádí požadovanou polohovou přesnost ± 15 cm/.

Pokud se týká vhodnosti této metody pro výškové zhušťování, byl by k tomu potřebný úplnější rozbor, na základě něhož by bylo pravděpodobně možné provést drobnější úpravu ve výpočetním programu, např. stanovení vyšší meze pro iterační přírůstky, zvýšení meze pro vylučování bodů vykazujících větší zbytkové paralaxy při řešení vzájemné orientace nebo jiné dílčí úpravy. V této souvislosti by bylo také vhodné ověřit, případně k tomu účelu upravit výpočetní program pro možnost zhušťování v bloku při 60% příčném překrytu mezi řadami.

Celé období vývoje AAT je poznamenáno snahou zdokonalovat již používaná řešení a dále vypracovat řešení exaktnější a komplexnější. To pochopitelně vyžadovalo a neustále vyžaduje používat stále větších počítačů. Získané zkušenosti ukazují, že velké počítače jsou nejen rychlejší, ale také levnější v provozu. Např. řešení, které si vyžádá 10 strojových hodin malého počítače proběhne ve velkém počítači v 1 minutě, což se pochopitelně mimo jiné projeví i v ekonomických nákladech. Je tedy možné usuzovat, že v budoucnu budou všechny větší úlohy analytické fotogrammetrie formulovány právě pro velké počítače.

Přesto však v posledních dvou až třech letech se řada autorů vrací k formulacím úloh na malých počítačích, které se stávají v důsledku snížení jejich cen dostupnější i pro menší provozy. Z nedostatku přesné měřicí techniky pro AAT /komparátorů/,

byly vypracovány metody početní aerotriangulace s využitím analogových strojů. Tento způsob aerotriangulace je nazýván jako aerotriangulace z nezávislých modelů, nebo také semianalytická aerotriangulace. Teoretické zdůvodnění a názory různých autorů byly publikovány v řadě odborných časopisů. V ČSSR se touto problematikou zabýval ing. Maršík z VÚGTK ve výzkumné zprávě č. 377 z roku 1970. Na základě jeho matematické formulace úlohy byl zpracován ve VÚGTK výpočetní program na počítači ELIOT 503.

Tento způsob aerotriangulace, i když je jakýmsi východiskem z nouze, má celou řadu výhod vůči klasické přístrojové triangulaci. Jednou z největších výhod je, že pro měření modelových souřadnic, které jsou vstupními údaji, lze použít všechny vysoce přesné vyhodnocovací stroje vybavené registračním zařízením a to i ty, které nemají zařízení pro zkřížené pozorování. Ve srovnání s klasickou aerotriangulací je další výhodou v tom, že veškeré transformace, korekce a vyrovnání souřadnic se provádí na samočinném počítači, což sebou nese možnost spojování a vyrovnání dalších řad a je možné i případné blokové vyrovnání. Není vyžadováno určité pevné rozložení geodetických vlícovacích bodů. Minimální počet pevných bodů při použití prostorové podobnostní či afinní transformace je 3, při polynomické transformaci druhého stupně je 5.

Modelové souřadnice geodetických, nově určovaných a navazovacích bodů se měří na univerzálním vyhodnocovacím přístroji tak, že jednotlivé modely se proměřují na sobě nezávisle v libovolném měřítku /při libovolných základnových složkách/. Svázání modelů do řady se provádí postupnou transformací dalšího modelu na předcházející model, čímž se dosáhne toho, že celá řada modelů je uvedena do jednoho měřítka a do jedné souřadné soustavy /např. do soustavy a měřítka prvního modelu v řadě/. Transformace se provádí na základě navazovacích bodů, které se volí na styku modelů. Řada modelů je převedena do geodetické soustavy prostřednictvím daných bodů prostorovou podobnostní transformací nebo polynomickou transformací vyššího stupně.

Zpracovaný výpočetní program podle teorie ing. Maršíka má řešit zhušťování v řadě do 10 modelů.

O tom, že problematika AAT je ve světě stále aktuální, svědčí celá řada různých akcí, které se v mezinárodním měřítku v poslední době pořádají. Tak např. v srpnu

1971 bylo uspořádáno III. komisí mezinárodní fotogrammetrické společnosti symposium o aerotriangulaci s cílem analyzovat výsledky provozních i zkušebních aerotriangulačních prací, provedených různými členskými organizacemi společnosti. Rovněž letos na XII. fotogrammetrickém kongresu byla aerotriangulaci věnována značná pozornost.

Zvláště aktuální jsou otázky: přesnost prostorové aerotriangulace, vliv systematických chyb, využívání údajů pomocných přístrojů při vyrovnání aerotriangulace, způsoby přesného laboratorního zpracování snímků, některé aspekty programově řízených fotogrammetrických výpočtů, různé analytické metody aerotriangulace, používání mřížkových komor, kalibrace leteckých komor a další.

I v ČSSR by bylo nutné se dále teoreticky i prakticky problematikou AAT zabývat. Jedná se především o případné zdokonalení používané metody, provedení hlubších teoretických rozborů především z hlediska přesnosti a v neposlední řadě přepracování používaných programů na perspektivní počítač.

Došlo dne 8.1. 1973.

Řešení soustav lineárních rovnic metodou ortogonalizace

1. Ú v o d

Cílem této stručné informace je upozornit čtenáře na dosud málo používaný postup řešení soustav lineárních rovnic metodou ortogonalizace matice soustavy. Kromě postupu výpočtu prvků ortogonální matice článek obsahuje i ukázkou autorem zpracovaného a odladěného podprogramu pro řešení soustavy lineárních rovnic v jazyku FORTRAN ZPA 600. Možnost použití metody ortogonalizace pro řešení soustav lineárních rovnic se špatně podmíněnými maticemi je ukázána na dvou konkrétních příkladech. Dosažené výsledky z ortogonalizace nejsou horší, než výsledky získané invertováním špatně podmíněné matice pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů.

2. Ortogonalizace matice soustavy a její využití pro řešení soustav lineárních rovnic

Ortogonální maticí, jak známo, nazýváme takovou regulární matici, k níž existující matice inverzní je rovna matici transponované. Prvky ortogonální matice stupně n pak musí splňovat $\frac{n}{2}(n+1)$ podmínek ortogonality, které lze stručně vyjádřit vztahy

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{kj} = 1 \quad \text{pro } i = k, \quad (1a)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{kj} = 0 \quad \text{pro } i \neq k, \quad (1b)$$

kde $i = 1, 2, \dots, n,$

$k = 1, 2, \dots, n.$

Je tedy zřejmé, že každou regulární matici stupně n bude možno převést na ortogonální tvar /ortogonalizovat/ pomocí $\frac{n}{2}(n+1)$ řádkových /sloupcových/ úprav. Ortogonalizace matice je podrobně vysvětlena v [2] str. 371-385. Zde se omezíme pouze na její stručný a postačující popis, převzatý ve zkrácené formě z [1] str.105 až 107.

První řádek matice soustavy A ponecháme beze změny a od prvků i tého řádku / $i = 2, 3, \dots, n$ / odečteme prvky prvního řádku vynásobené číslem

$$\lambda_{i1} = \frac{\sum_{j=1}^n a_{1j} a_{ij}}{\sum_{j=1}^n a_{1j}^2} \quad (2a)$$

Po této úpravě bude v matici $A^{(1)}$ splněna podmínka ortogonality (1b) pro $i = 1$ a $k = 2, 3, \dots, n$. V matici $A^{(1)}$ ponecháme pak první dva řádky beze změny a od i tého řádku / $i = 3, 4, \dots, n$ / odečteme druhý řádek vynásobený číslem

$$\lambda_{i2} = \frac{\sum_{j=1}^n a_{2j}^{(1)} a_{ij}^{(1)}}{\sum_{j=1}^n [a_{2j}^{(1)}]^2} \quad (2b)$$

Tímto postupem získáme nakonec matici $A^{(n-1)}$, jejíž prvky budou splňovat podmínku (1b) pro všechna uvažovaná i i k . Zbývající n podmínky ortogonality typu (1a) pak snadno splníme tím, že prvky i tého řádku / $i = 1, 2, \dots, n$ / vynásobíme modulem

$$\nu_i = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n [a_{ij}^{(n-1)}]^2}} \quad (3)$$

Matice soustavy $A^{(n)}$ bude tedy maticí ortogonální a matici k ní inverzní získáme transponováním matice $A^{(n)}$, tzn. záměnou řádků za sloupce.

3. Podprogram pro řešení soustavy lineárních rovnic a dosažené výsledky u špatně podmíněných matic

V příloze 1 je ukázán možný způsob řešení soustavy lineárních rovnic metodou ortogonalizace. Podprogram RESLIR /sestavený v jazyce FORTRAN ZPA 600/ se v hlavní programové jednotce vyvolá příkazem

CALL RESLIR /P1, P2, P3, N1, N2, N3/

kde skutečnými parametry jsou:

$P1 \dots$ jméno pole prvků rozšířené matice soustavy rozměru $n, (n+p)$, kde n je stupeň matice soustavy a p je počet pravých stran

$P2 \dots$ jméno pole prvků matice neznámých rozměrů n, p ,

$P3 \dots$ jméno pole prvků řádkové matice rozměru n podprogramem dočasně využívané pro řádkové úpravy

$N1 \dots$ stupeň matice soustavy n

$N2 \dots$ stupeň matice soustavy zvětšený o počet pravých stran $(n+p)$

$N3 \dots$ počet pravých stran p

Prvky polí $P1, P2, P3$ jsou typu REAL, čísla $N1, N2, N3$ typu INTEGER.

Podprogram RESLIR byl odladěn na několika číselných příkladech převzatých z [1] pro řešení soustav tří až sedmi lineárních rovnic a dal plně uspokojivé výsledky. Navíc byla ověřena jeho spolehlivost pro řešení soustav se špatně podmíněnými maticemi na dvou číselných příkladech, převzatých rovněž z [1] str. 137. Pro špatně podmíněné matice

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1,001 \\ 1 & 1,001 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \\ 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 & 1/10 \end{vmatrix}$$

byly pro zvolené vektory neznámých

$$x_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad x_2 = \begin{vmatrix} 2520 \\ 2520 \\ 2520 \\ 2520 \\ 2520 \end{vmatrix}$$

vypočteny vektory pravých stran

$$P_1 = \begin{vmatrix} 3 \\ 3,001 \\ 3,001 \end{vmatrix}, \quad P_2 = \begin{vmatrix} 3674 \\ 2754 \\ 2229 \\ 1879 \\ 1627 \end{vmatrix}$$

Vektory neznámých pak byly z matic M_1, P_1 a M_2, P_2 vypočteny dvěma způsoby:

- a/ invertováním špatně podmíněných matic M_1 a M_2 pomocí matic vlastních čísel a vlastních vektorů, postupem uvedeným v [1] str. 135 a 136;
- b/ ortogonalizací popsaným podprogramem RESLIR.

Dosažené výsledky jsou shrnuty a porovnány se správnými hodnotami v tabulce 1.

Soustava	Ř e š e n í		Správné hodnoty
	z inverzní matice pomocí vlast. čísel	z ortogonální matice	
1	1,00001	0,99998	1
	0,99999	1,00001	1
	0,99997	1,00001	1
2	2520,0	2520,1	2520
	2521,2	2519,3	2520
	2515,0	2522,5	2520
	2522,3	2516,7	2520
	2517,6	2521,5	2520

Tabulka 1

Prakticky stejných výsledků bylo dosaženo v obou maticích i pro několik dalších zvolených vektorů neznámých.

Pro objektivnější srovnání obou zmíněných metod, které není závislé na náhodné volbě vektoru neznámých, bylo výpočtem ověřeno, do jaké míry je splněna základní podmínka, vyplývající z definice inverzní matice. Pro případ inverze matic pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů byly vypočteny součiny matice původní M_i s maticí inverzní

$$M_i M_i^{-1} \text{ a } M_i^{-1} M_i, \quad i = 1, 2,$$

jejichž výsledkem by zřejmě měly být matice jednotkové. Pro druhý případ ortogonalizovaných matic M_{oi} má zřejmě být splněna rovnice

$$M_{oi} M_{oi}^T = M_{oi}^T M_{oi} = E$$

Odchytky od jednotkových matic v obou případech byly prakticky stejné a dosahovaly maximálně 1,2 jednotky v řádu 10^{-4} u matice M_0 , a 1,3 jednotky v řádu 10^{-3} u matice M_2 .

4. Z á v ě r

Zmíněný způsob řešení soustav lineárních rovnic metodou ortogonalizace bude zřejmě vhodným i pro výpočty geodetické a to nejen pro řešení normálních rovnic při určování vyrovnaných hodnot metodou nejmenších čtverců, nýbrž i pro výpočet koeficientů transformačních rovnic a pro řadu dalších úloh, ve kterých se počítají neznámé z lineárních rovnic bez vyrovnání. Ve srovnání s běžným postupem invertování matic, /který u špatně podmíněných matic selhává/, je zřejmé, že metoda ortogonalizace bude mít značně širší meze použitelnosti. Ukazuje se, že u špatně podmíněných matic bude možné získat tímto poměrně jednoduchým postupem výsledky stejně hodnotné jako při použití poměrně složitějšího a na počet paměťových míst náročnějšího postupu inverze matice pomocí matic vlastních čísel a vlastních vektorů.

L I T E R A T U R A

- [1] Bystrý J.: Základy numerické matematiky, skriptum VAAZ, Brno 1971.
- [2] Děmidovič, Maron: Základy numerické matematiky, SNTL Praha 1966.
- [3] Rektorys K. a kol.: Přehled užití matematiky, SNTL Praha 1963.

Došlo dne 8.1. 1973.

10 FORTRAN ZPA 600

- ZAZNAM O PŘEKLADU SYMBOLICKÉHO PROGRAMU :

```

019      SUBROUTINE RESLIR(A,X,P,N,M,NP
020      1)
021      DIMENSION A(N,M),X(N,NP),P(N)
022      L=2
023      1 EM=0.E0
024      DO 10 J=1,N
025      10 EM=EM+A(L-1,J)**2
026      DO 11 I=L,N
027      EL=0.E0
028      DO 20 J=1,N
029      20 EL=EL+A(L-1,J)+A(I,J)
030      11 P(I)=EL/EM
031      DO 12 I=L,N
032      DO 12 J=1,M
033      12 A(I,J)=A(I,J)-A(L-1,J)*P(I)
034      L=L+1
035      IF(L.LE.N)GOTO1
036      DO 14 I=1,N
037      P(I)=0.E0
038      DO 13 J=1,N
039      13 P(I)=P(I)+A(I,J)*A(I,J)
040      14 P(I)=SQRT(P(I))
041      DO 15 I=1,N
042      DO 15 J=1,M
043      15 A(I,J)=A(I,J)/P(I)
044      L=1
045      16 K=L+N
046      IF(K.GT.M)GOTO19
047      DO 17 J=1,N
048      17 P(J)=A(J,K)
049      DO 18 I=1,N
050      X(I,L)=0.E0
051      DO 18 J=1,N
052      18 X(I,L)=X(I,L)+A(J,I)*P(J)
053      L=L+1
054      GO TO 16
055      19 RETURN
056      END

```

BEZ CHYBY
KONEC PŘEKLADU

СОДЕРЖАНИЕ

Вагала: Трансформация мировых геодезических референц-систем	1
Павлица: Приблизительное выравнивание полигональных сетей в соответствии с условиями	14
Выкутил: К решению второй основной геодезической задачи на средние расстояния при использовании конформной проекции эллипсоида Гаусса	27
Прахарж: Упрощенное вычисление азимута Полярной звезды в полевых условиях	33
Филипски: Общее решение трансформации координат между поясами проекции Гаусса	38
Котва: Установление координат точки пересечением, измерением длины и дирекционного угла	51
Красны: Решение общей задачи детерминации линейной информации в цифровой форме с возможностью ее современной ректификации	63
Душатко: Установление некоторых характеристик внешнего гравитационного поля Земли для малых высот над Землей	75
Кански: К концепции аэрофотопо съемки	84
Бенедикт: Некоторые проблемы связанные с изготовлением и употребительностью фотокарт	91
Франек: Современные проблемы фотограмметрического сгущения	99
Прахарж: Решение систем линейных уравнений методом ортогонализации	110

INHALT

Vahala: Transformation der geodätischen Referenzweltssysteme	1
Pavlica: Annähernde Ausgleichung der Längennetze nach den Bedingungen	14
Vykučil: Zur Lösung der zweiten geodätischen Hauptaufgabe für mittlere Entfernungen mit Anwendung der konformen Gauss-Abbildung des Ellipsoides auf der Kugel	27
Prachář: Vereinfachte Polarstern-Azimutberechnung in Feldbedingungen	33
Filipský: Allgemeine Lösung der Koordinatentransformation zwischen dem Streifen der Gauss-Krüger-Abbildung	38
Kotva: Bestimmung der Punktkoordinaten durch Einschneiden bei gemessenen Längen und Richtungswinkeln	51
Krásný: Lösung einer allgemeinen Aufgabe der Determination der Linieninformation in digitaler Form mit der Möglichkeit ihrer gleichzeitigen Rektifikation	63
Dušátko: Die Bestimmung einiger Charakteristiken des äusseren Schwerefeldes der Erde für kleine Höhen über der Erdoberfläche	75
Kánský: Zur Konzeption der Luftbildaufnahme	84
Benedikt: Einige Probleme der Erzeugung und Anwendbarkeit der Photokarten	91
Franěk: Gegenwärtige Probleme der photogrammetrischen Verdichtung	99
Prachář: Lösung der Systeme linearer Gleichungen durch die Orthogonalisationsmethode	110